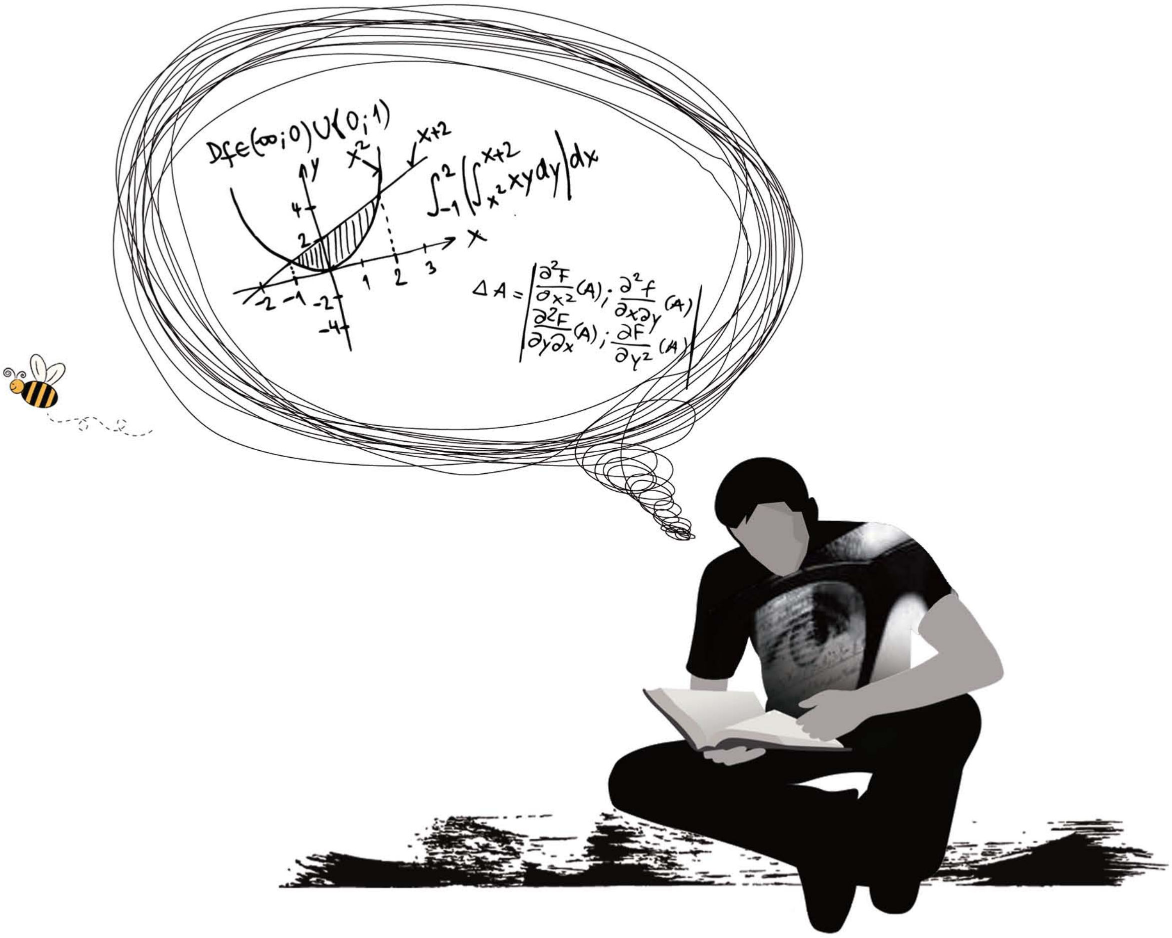


线性代数及其应用

Linear Algebra and Its Applications

王坤龙 编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

线性代数及其应用

王坤龙　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书共分为五章：行列式、矩阵、线性方程组、特征值和二次型等，并介绍了在相关学科的具体应用案例。书中内容注重培养学生的抽象思维能力以及分析问题和解决问题能力，力求通俗易懂，深入浅出；利用矩阵的初等变换给出了线性代数中的相关知识，突出了行列式、向量、矩阵及其运算、线性方程组、矩阵特征值等内容，在经济预测与决策、投入产出分析、层次分析法，以及在物理学、化学计量学、量子力学、电磁场理论等学科的具体应用案例，展现了线性代数 “应用广泛性”的这一学科特性。每章节配置了适量的自测题和习题，便于测试学生的综合运用和掌握线性代数知识的能力。

本书可作为高职高专、专升本等层次的“线性代数”课程的教材或参考教材。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用 / 王坤龙编著. —北京：电子工业出版社，2014.10

ISBN 978-7-121- 23308-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 107431 号

策划编辑：施玉新
责任编辑：施玉新　　文字编辑：刘　佳
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：11.75　字数：300.8 千字
版　　次：2014 年 10 月第 1 版
印　　次：2014 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序　言

线性代数是大学数学的重要组成部分，但是，目前大多数线性代数课程的教材所关注的还是对其理论知识本身的介绍和讲解，内容和形式单一，对于学习者特别是职业教育形势下的学生来讲，缺乏与实际应用的联系。因此，在线性代数教材中增加实际应用教学内容的必要性愈来愈突显。

本书在秉承传统介绍和讲解线性代数理论知识的基础上，从不同学科、不同视角，引入了一定量的实际应用案例，更有利于学生对知识的理解和掌握。编者结合《高职高专教育线性代数课程教学基本要求》以及多年来的数学教学及教改经验，为适应高职高专等职业教育学生的教学需要，经过潜心努力，编写了本教材。希望能使学生在掌握线性代数最基本的概念、理论和方法的基础上，帮助他们解决日常生活、生产技术及经济管理中的一些实际问题。

2014 年 3 月

目　录

第一章　行列式 ······ （1）
第一节　n 阶行列式 ······ （1）
一、全排列及其逆序数 ······ （1）
二、二、三阶行列式 ······ （2）
三、n 阶行列式 ······ （4）
习题 1.1 ······ （7）
第二节　行列式的性质 ······ （8）
习题 1.2 ······ （11）
第三节　行列式按行（列）展开 ······ （12）
习题 1.3 ······ （18）
第四节　克莱姆法则 ······ （19）
习题 1.4 ······ （22）
第五节　向量及行列式在运动学、牛顿力学中的应用 ······ （23）
一、质点运动的速度 ······ （23）
二、质点运动的加速度 ······ （24）
三、叠加运动方程 ······ （24）
四、牛顿运动定律 ······ （24）
五、物体运动转动定理 ······ （25）
第一章自测题 ······ （26）
第二章　矩阵 ······ （29）
第一节　矩阵的概念 ······ （29）
一、矩阵的概念 ······ （29）
二、矩阵与线性变换 ······ （31）
习题 2.1 ······ （32）
第二节　矩阵的运算 ······ （33）
一、矩阵的加法 ······ （33）
二、数与矩阵的乘法 ······ （34）
三、矩阵的乘法 ······ （35）
四、矩阵的转置 ······ （37）

五、共轭矩阵 ……（39）
习题 2.2 ……（39）
第三节　矩阵的初等变换 ……（40）
习题 2.3 ……（44）
第四节　逆矩阵 ……（45）
一、矩阵的行列式 ……（45）
二、逆矩阵 ……（46）
习题 2.4 ……（51）
第五节　矩阵的秩 ……（51）
习题 2.5 ……（54）
第五节　矩阵运算在线性规划中的应用 ……（54）
一、线性规划问题的数学模型 ……（55）
二、单纯形法 ……（60）
第六节　多元线性回归分析预测法的应用 ……（65）
第二章自测题 ……（66）
第三章　线性方程组 ……（69）
第一节　高斯消元法 ……（69）
习题 3.1 ……（72）
第二节　向量组的线性相关性 ……（73）
一、n 维向量及其运算 ……（73）
二、向量组的线性相关与线性无关 ……（74）
三、线性方程组、向量组、矩阵之间的联系 ……（77）
习题 3.2 ……（79）
第三节　向量组的秩 ……（80）
一、向量组的等阶 ……（80）
二、向量组的秩 ……（80）
三、向量组的秩与矩阵的秩 ……（81）
习题 3.3 ……（82）
第四节　线性方程组解的结构 ……（83）
习题 3.4 ……（88）
第五节　运用矩阵运算讨论线性方程组的解 ……（89）
第六节　线性代数在电磁理论中的应用 ……（89）
一、矢量微分运算 ……（90）
二、场的概念 ……（90）
三、导体系的电位与电位系数 ……（91）
第三章自测题 ……（92）

第四章　特征值……………………………………………………………………………（96）

第一节　矩阵的特征值与特征向量………………………………………………………（96）
一、特征值与特征向量……………………………………………………………………（96）
二、特征向量的性质………………………………………………………………………（99）
习题 4.1……………………………………………………………………………………（100）
第二节　相似矩阵…………………………………………………………………………（100）
一、相似矩阵的概念………………………………………………………………………（100）
二、相似变换矩阵的求法…………………………………………………………………（101）
习题 4.2……………………………………………………………………………………（103）
第三节　向量的正交化……………………………………………………………………（104）
一、向量的内积……………………………………………………………………………（104）
二、标准正交基……………………………………………………………………………（104）
三、向量组的正交化………………………………………………………………………（105）
习题 4.3……………………………………………………………………………………（107）
第四节　实对称矩阵的对角化……………………………………………………………（107）
习题 4.4……………………………………………………………………………………（110）
第五节　层次分析法（AHP）的应用……………………………………………………（110）
第四章自测题………………………………………………………………………………（117）

第五章　二次型……………………………………………………………………………（120）

第一节　二次型的一些概念………………………………………………………………（120）
一、二次型的概念…………………………………………………………………………（120）
二、二次型的矩阵表示……………………………………………………………………（120）
三、二次型的标准型………………………………………………………………………（121）
习题 5.1……………………………………………………………………………………（122）
第二节　二次型的标准型…………………………………………………………………（122）
一、对称矩阵的合同关系…………………………………………………………………（123）
二、用正交变换将二次型化为标准型……………………………………………………（124）
三、用配方法将二次型化为标准型………………………………………………………（125）
习题 5.2……………………………………………………………………………………（127）
第三节　实二次型的分类与判定法………………………………………………………（128）
一、实二次型的分类………………………………………………………………………（128）
二、正定二次型和正定矩阵的判别法……………………………………………………（128）
习题 5.3……………………………………………………………………………………（130）
第四节　在投入产出模型预测法中的应用………………………………………………（131）
一、投入产出模型…………………………………………………………………………（131）
二、国民经济投入产出预测………………………………………………………………（134）
第五节　综合应用…………………………………………………………………………（138）
一、在量子力学中的应用…………………………………………………………………（138）

二、在化学计量学中的应用……………………………………………………………………（139）
第五章自测题………………………………………………………………………………………（141）
习题解答………………………………………………………………………………………………（142）
参考文献………………………………………………………………………………………………（179）
后记……………………………………………………………………………………………………（180）

第一章 行列式

行列式的理论是对求解 n 元线性方程组的需要而建立起来的，它是研究线性代数的一个重要工具，在其他学科方面也有着广泛的应用.

第一节 n 阶行列式

一、全排列及其逆序数

定义 1.1 n 个不同元素按一定的次序排成一个有序数组，称为 n 级全排列，简称排列.

n 个不同元素的全排列的种数共有 $n!$ 个.

一般地，我们只讨论从 1 到 n 这 n 个数的全排列，将 1，2，…，n 这 n 个自然数的任意一个排列记成 $a_1a_2\cdots a_n$. 对于 n 个不同元素的任一排列，我们要考虑各元素之间的次序，通常规定从小到大的次序为标准排列（或称自然排列）即 $12\cdots n$.

定义 1.2 在 n 个不同元素的任一排列中，如果两个元素的先后次序和标准次序不同，那就称这两个元素构成一个逆序. 一个排列中所有元素的逆序之和，称为这个排列的逆序数.

显然，标准排列的逆序数是 0.

例如，在排列 2413 中，21、41、43 都构成逆序，而且只有这三个逆序，所以说 2413 的逆序数等于 3.

下面讨论排列逆序数的一般求法：设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是自然数 1，2，…，n 的一个排列，先看元素 a_1 前面有多少个数和 a_1 构成逆序，即有多少个数比 a_1 大，设为 t_1 个；再看 a_2 的前面有多少个数比 a_2 大，即有多少个数和 a_2 构成逆序，设为 t_2 个；如此继续下去最后设 a_n 前面有 t_n 个数比 a_n 大. 那么这个排列的逆序数等于 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

例 1 求排列 632514 的逆序数.

解 在排列 632514 中，6 排在首位，逆序数是 0；

3 前面有一个比它大的数，逆序数是 1；

2 前面有两个比它大的数，逆序数是 2；

5 前面有一个比它大的数，逆序数是 1；

1 前面有四个比它大的数，逆序数是 4；

4 前面有两个比它大的数，逆序数是 2；

排列 632514 的逆序数若记为 t，则

$$t=0+1+2+1+4+2=10.$$

例 2 求排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 的逆序数 t.

解 显然 1，3，…，$2n-1$，的逆序数均为 0，$2n$ 的逆序数为 0，$2n-2$ 的逆序数为 2，$2n-4$ 的逆序数为 4，…，2 的逆序数为 $2n-2$．因此，所求排列的逆序数为

$$t=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1).$$

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，632514 为偶排列，2413 为奇排列.

定义 1.4 将一个全排列中任意两个元素对调位置，其他元素不动，这种形成新排列的方法称为对换，把相邻两个元素对换称为相邻对换.

例如，排列 3124 经元素 3 和 4 的对换，变成新排列 4123. 在对换下，排列的奇偶性会有变化. 如 3124 是偶排列，4123 是奇排列。可见，对换将改变排列的奇偶性.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换后，得到的新排列与原排列有不同的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设有全排列 $a_1a_2\cdots a_l abb_1\cdots b_k$，对换 a 与 b，其余元素不动，得到新排 $a_1a_2\cdots a_l bab_1\cdots b_k$.

当 $a<b$ 时，对换后使 a 增加一个逆序，而 b 和其他元素的逆序都没有变，因此，新排列比原排列的逆序数增加 1；

当 $a>b$ 时，对换后得到的新排列比原排列的逆序数减少 1，所以，相邻对换改变了排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_n$，$a$ 和 b 之间有 k 个元素，先把 b 和它左边的 $k+1$ 个元素依次作 $k+1$ 次相邻对换，得到 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_k c_1\cdots c_n$，再把 a 和它右边的 k 个元素依次作 k 次相邻对换，得到的新排列为 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_n$，经过这样 $2k+1$ 次相邻对换就达到 a 和 b 对换的目的，而每次相邻对换都改变排列的奇偶性，所以，新排列与原排列的奇偶性不同.

前面我们提到，标准排列的逆序数是 0，是偶排列，因此不难得到下面推论.

推论 奇排列调成标准排列需作奇数次对换；偶排列调成标准排列需作偶数次对换.

定理 1.2 $n\geqslant 2$ 时，n 个元素的所有排列中，奇偶排列的个数相等，各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证 假设 $n!$ 个排列中有 s 个奇排列，t 个偶排列，此时 $s+t=n!$．欲证 $s=t$，先将所有奇排列的头两个数都作一次对换，这样就得到了 s 个不同的偶排列. 已知偶排列共有 t 个，所以 $s\leqslant t$。同理，将所有偶排列的头两个数都作一次对换，这样就得到了 t 个不同的奇排列. 已知奇排列共有 t 个，所以 $t\leqslant s$．故 $s=t$. 这就证明了全部 $n!$ 个排列中，奇偶排列的个数各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

二、二、三阶行列式

求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2)\end{cases}$$

用消元法解方程组，$a_{22}\times(1.1)-a_{12}\times(1.2)$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

又 $a_{21}\times(1.1)-a_{11}\times(1.2)$ 得

$$(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

为了记忆方便，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

等式左端称为二阶行列式，可用字母 $\boldsymbol{D}$ 表示，其中横向称为行，竖向称为列，二阶行列式有两行两列，每个数 a_{ij}（i，$j=1$，2）称为行列式的元素. a_{ij} 的第 1 个下标 i 表示它在第 i 行，称为行标；第 2 个下标 j 表示它在第 j 列，称为列标. 行列式从左上角到右下角的对角线称为主对角线，而行列式从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 从等式右端可以看出，二阶行列式是两项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的两个元素之乘积. 一项是主对角线上两个元素的乘积，带正号；另一项是次对角线上两个元素的乘积，带负号（图 1-1），这称为二阶行列式的对角线法则.

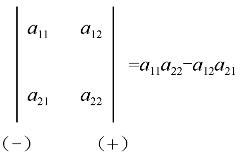


图 1-1

例如 $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-(-3)\times2=10$,

$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=5\times3-(-3)\times0=20$,

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=1\times0-5\times2=-10$.

利用二阶行列式的概念，（1.3）中的分子可分别记为

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组的解可写为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},(\boldsymbol{D}\neq0).$$

用消元法解三元线性方程组时，为了便于记忆，用同样的方法可以定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.4}$$

等式左端称为三阶行列式，可用字母 $\boldsymbol{D}$ 表示，它具有三行三列，元素 a_{ij}（i，$j=1$，2，3）的下标 i 和 j 表示这个元素位于第 i 行第 j 列. 注意到三阶行列式为 3!=6 项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积. 主对角线方向的三项前面带正号；次对角线方向的三项前面带负号（如图 1-2），这称为三阶行列式的对角线法则.

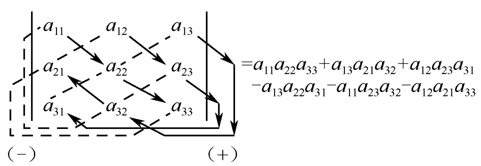


图 1-2

例 3 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$，所以方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{10} = 2，\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{10} = -1.$$

例 4 计算下面三阶行列式

（1）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$；（2）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$.

解（1）$\boldsymbol{D} = 3\times1\times(-2)+(-2)\times3\times2+1\times0\times(-2)-1\times1\times2-3\times0\times3-(-2)\times(-2)\times(-2)=-12.$

（2）$\boldsymbol{D} = 1\times1\times1+(-a)(-c)b+(-b)ca-(-b)\times1\times b-(-a)a\times1-1\times(-c)c=a^2+b^2+c^2+1.$

三、n 阶行列式

1. 项的组成

从（1.4）可以看出，三阶行列式是 3!=6 项的代数和. 其中，每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积；而且，所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积也是三阶行列式的一项. 因此，如果把行标的排列一律都写成标准顺序（即从小到大的顺序），三阶行列式的任意项在不计符号时，就可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}，\tag{1.5}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是“1，2，3”的一个排列. 当 p_1，p_2，p_3 取尽“1，2，3”的所有排列时，(1.5) 恰好取尽（1.4）中的所有项（不记符号）.

2. 项的符号

把（1.4）中的各项按（1.5）写出时，带正号的有三项，它们的列标的排列分别是 123，231，312，均构成偶排列. 带负号的也有三项，它们列标的排列分别是 321，213，132，均构成奇排列. 因此项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的列标排列 $p_1p_2p_3$ 是偶排列时，取正号；是奇排列时，取负号. 于是（1.4）的任意项可写成 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 其中 $p_1p_2p_3$ 是“1，2，3”的一个排列，t 为该排列的逆序数.

综上分析，三阶行列式可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}，$$

其中 $\sum$ 是对“1，2，3”构成的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和. 显然，这些规律对于二阶行列式也成立.

把三阶行列式推广到一般情形，就得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 设有 n^2 个数（元素），排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

从表中取位于不同行不同列的n个数作乘积，所取到的n个元素按行标由小到大排成标准排列，列标排列$p_1p_2\cdots p_n$为自然数“1，2，…，n”的一个排列，其逆序数为t，得到项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于列标的排列为$n!$种，这样取得的项共有$n!$个，这些项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

称为n阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中$\sum$是对“1，2，…，n”构成的所有排列$p_1p_2\cdots p_n$对应的全部项取和，数a_{ij}（$i, j=1, 2, \cdots, n$）称为行列式的元素. 行列式也可用符号$\Delta(a_{ij})$或字母$\boldsymbol{D}$简记.

这个定义和前面的二阶、三阶行列式的定义是一致的，只要取n等于2或3即可，当$n=1$时，一阶行列式就是元素本身，即$|a|=a$. 注意把一阶行列式和a的绝对值区分开，必要时需加以说明.

但应注意，二阶和三阶行列式的对角线计算法对四阶以上行列式的计算是不适宜的.

因此，对于n阶行列式的定义我们采取下面的这种形式来进行叙述.

从定义1.5看出，项$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$中元素的行标构成的排列$12\cdots n$是标准排列，逆序数是0，因此该项可记成$(-1)^{0+t} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 若交换这项中的两个因子的位置，它们的行标排列和列标排列都随之做相应对换，排列的奇偶性同时改变，但它们的逆序数之和的奇偶性不变，项前的正负号不变. 因此，该项的因子经若干次交换，可使列标排列变成标准排列，而项前的正负号不会改变，因此可写成形式

$$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

其中$q_1q_2\cdots q_n$是元素行标的一个排列，s是它的逆序数. 所以

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

显然，排列$q_1q_2\cdots q_n$由排列$p_1p_2\cdots p_n$唯一确定. 且不同的排列$p_1p_2\cdots p_n$对应不同的排列$q_1q_2\cdots q_n$. 这样，由$n!$项$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$得到$n!$项不同的$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$，即为$q_1q_2\cdots q_n$所有可能排列对应的项，于是得到

$$\boldsymbol{D}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

定义 1.6

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}\ ,$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是元素行标的一个排列，s 是它的逆序数，$\sum$ 是对“1，2，…，n”构成的所有新排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 取和.

下面仅以特例进行说明，如何利用定义来计算 n 阶行列式.

例 5　计算下面对角行列式（对角线以外的元素全是 0）

（1）$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$.

解　（1）依据行列式定义，令 $a_{11}=\lambda_1,\ a_{22}=\lambda_2,\ \cdots,\ a_{nn}=\lambda_n$，在和式 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只有当 p_1=1，p_2=2，…，p_n=n 时这一项不等于零，其他项全是零，而排列 $p_1p_2\cdots p_n=12\cdots n$ 的逆序数是 0，所以

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

（2）令 $a_{1n}=\lambda_1,\ a_{2,n-1}=\lambda_2,\ \cdots,\ a_{n1}=\lambda_n$，在和式 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只有当 $p_1=n$，p_2=n−1，…，p_n=1 时的一项不等于零，其他项全是零，而排列 $p_1p_2\cdots p_n$=(n−1)…321 的逆序数 $t=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 6　当行列式对角线以下的元素全为零时，称其为上三角行列式，证明上三角行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　依照行列式定义的等价形式

$$\boldsymbol{D}=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}\ ,$$

当 $q_j>j$ 时，$a_{q_j j}=0\,(j=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，只有当 $a_j\leqslant j$ 时，有可能 $a_{q_j j}\neq 0\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

因为 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 是取自不同行不同列的 n 个元素乘积，所以，其乘积可能不为零的项的第一个元素只能取第一列的 a_{11}，其第二个元素只能取第二列的 a_{22}，…，其第 n 个元素只能取 a_{nn}，该项即为

$$a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其行标排列 $q_1q_2\cdots q_n=12\cdots n$ 的逆序数是 0，而其他各项均为 0，则 $\boldsymbol{D}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

类似地，当行列式对角线以上的元素全为零时，称其为下三角行列式，和上三角行列式相仿，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式. 在计算行列式时，常常把行列式化为三角行列式，以简化计算. 例 6 的结果可作为公式应用.

例 7　求下列行列式的值

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}.$$

解　在四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 的所有项中，除 $aceg,bcef$ 两项外，其余项都为 0.$aceg$ 的列标排列为 1234，是偶排列；$bcef$ 的列标排列为 4231，是奇排列. 所以

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}=aceg-bcef .$$

习题 1.1

1．求出下列各排列的逆序数，并指出排列的奇偶性

（1） 32415；　　（2）$n(n-1)(n-2)\cdots 321$；

（3）$135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

（4）$147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1)369\cdots(3n)$.

2．求 i，j 使

（1）$29\,i\,146\,j\,73$ 为偶排列；

（2）$3\,i\,4625\,j\,7$ 为奇排列.

3．用行列式定义证明

（1）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

4．指出下列各乘积是属于几阶行列式中的项，并确定其前面的符号

（1）$a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$；（2）$a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

5．求行列式$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$中含 x^4 和 x^3 的项.

6．利用行列式的定义计算五阶行列式

$$\boldsymbol{D}_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

第二节　行列式的性质

由行列式定义可知，n 阶行列式的值是 $n\,!$项的代数和，且每项是 n 个数的乘积，当 n 较大时，计算量就相当大，而利用行列式的性质可简化行列式的计算.

设 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式. 在下面各性质中都设 $\boldsymbol{D} = \Delta(a_{ij})$ 是上面的行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　将 $\boldsymbol{D} = \Delta(a_{ij})$ 的转置行列式写成如下形式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij} = a_{ji}$（i，$j = 1$，2，…，n），由行列式的定义 1.5 和定义 1.6 可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} &= \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = \boldsymbol{D} \end{aligned}$$

其中 t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

上述情况表明行列式的行和列的地位是相同的，也就是说，对“行”有关的性质成立，

对“列”也同样成立，反之亦然. 因此，下面的性质只对行（或列）证明即可.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证 把行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行和第 j 行互换而其他行保持不变，得到行列式 $\boldsymbol{D}_1$，即

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdots\cdots 第i行 \\ \\ \cdots\cdots 第j行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

可以看出，当 $k\neq i, j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$，而当 $k=i,\ j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}(p=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 根据 n 阶行列式的定义 1.5 和定义 1.6，可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中当行标排列为自然排列时，t 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设 t_1 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，于是

$$\boldsymbol{D}_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-\boldsymbol{D}.$$

推论 若行列式中有两行（列）完全相同，则该行列式为零.

证 把完全相同的两行互换，则有 $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}$，故 $\boldsymbol{D}=0$.

性质 3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以行列式.

证

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$=k\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=k\boldsymbol{D}\cdot$$

推论 1 行列式中某一行（或列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 若行列式中有一行（列）所有元素全是零，则该行列式等于零.

推论 3 行列式中若有两行（列）元素对应成比例，则该行列式等于零.

性质 4 若行列式的某列（行）的所有元素都是两数之和，那么这个行列式等于两个行列式之和，即

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证

$$\boldsymbol{D}_1=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots(a_{q_j j}+a'_{q_j j})\cdots a_{q_n n}=\sum(-1)^s a_{q_1 1}$$
$$a_{q_2 2}\cdots a_{q_j j}\cdots a_{q_n n}+\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a'_{q_j j}\cdots a_{q_n n}.$$

例 1 计算

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500+3 & 20+1 & 300-2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=-84+100\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-84.$$

性质 5 把行列式的某一列（行）的各元素 k 倍后加到另一列（行）的对应元素上去，行列式不变.

上述这些性质可以简化行列式的计算，为了以后书写方便，引入下面记号，用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换 i，j 两行；用 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换 i, j 两列；用 $r_i \times k(c_i \times k)$ 表示用数 k 乘第 i 行（列）各元素；第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $r_i \div k(\text{或}c_i \div k)$；用 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$ 表示第 j 行（列）各元素 k 倍加到第 i 行（列）的对应元素上.

例 2 计算

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{D}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_1}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=9.$$

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times 8=48.$$

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}.$$

解 从第 4 行开始，后行减前行

$$D\xlongequal{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2\\r_2-r_1}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}$$

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

习题 1.2

1．用行列式性质计算下列各行列式

（1）$\begin{vmatrix}103&100&104\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b & 0 \\ 3 & e & 4 & 5 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2．计算

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}.$$

3．计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

4．写出五阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 的项.

第三节　行列式按行（列）展开

本节介绍另一种行列式的计算方法——降阶法.

一般说来，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要容易，因此我们考虑用低阶行列式来表示高阶行列式，从而将高阶行列式的计算问题转化为低阶行列式来进行.

对于三阶行列式，容易得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这样三阶行列式的计算可以归结为二阶行列式的计算. 而这些二阶行列式是三阶行列式中去掉一行一列而得到的.

定义 1.7　在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的元素按原来次序构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 $\boldsymbol{M}_{ij}$；若 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$，则称 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）.

因此，三阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\boldsymbol{A}_{11} + a_{12}\boldsymbol{A}_{12} + a_{13}\boldsymbol{A}_{13}. \tag{1.6}$$

例 1 写出四阶行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式.

解

$$\boldsymbol{M}_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{23} = (-1)^{2+3}\boldsymbol{M}_{23} = -\boldsymbol{M}_{23}.$$

引理 在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中，如果它的第 i 行元素除去 a_{ij} 外其余元素全是零，则 $\boldsymbol{D}$ 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的乘积，即

$$\boldsymbol{D} = a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}.$$

证 先证 a_{ij} 位于第一行第一列的情况，此时 $a_{ij} = a_{11}$.

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

当 $p_1 \neq 1$ 时， $a_{1p_1} = 0$，且排列 $1p_2p_3\cdots p_n$ 和排列 $p_2p_3\cdots p_n$ 的逆序数相同，故

$$\boldsymbol{D} = \sum (-1)^t a_{11}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$
$$= a_{11}\sum (-1)^t a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

其中 t 为排列 $p_2p_3\cdots p_n$ 的逆序数，于是

$$\boldsymbol{D} = a_{11}\boldsymbol{M}_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}\boldsymbol{M}_{11} = a_{11}\boldsymbol{A}_{11}$$

再证一般情况，此时

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果，我们将 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行和它上面的 $i-1$ 行依次交换，把第 i 行经过 $i-1$ 次调换到第 1 行；再将得到的行列式的第 j 列和它左边的 $j-1$ 列依次交换，把第 j 列经过 $j-1$ 次

调换到第 1 列. 总之，经过 $i+j-2$ 次调换，把 a_{ij} 调到左上角原 a_{11} 的位置，每调换一次行或列，行列式就改变一次正负号，于是

$$\boldsymbol{D}=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{ij}(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}=a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}.$$

定理 1.3 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$\boldsymbol{D}=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}（i=1，2，\cdots，n),$$

或

$$\boldsymbol{D}=a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}（j=1，2，\cdots，n).$$

证 先按行证明，根据上节性质 5

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+0+\cdots & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据引理，即得

$$\boldsymbol{D}=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(i=1，2，\cdots，n).$$

类似地，若按列证明，则得

$$\boldsymbol{D}=a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(j=1，2，\cdots，n).$$

这个定理称为行列式按某行（列）展开定理，利用行列式的性质并结合展开定理，可以简化行列式的计算.

利用定理 1.3 可知，（1.6）式就是三阶行列式按第一行展开的式子.

定理 1.4 行列式中任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

证 只证第一个等式，作辅助行列式

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdots 第i行 \\ \\ \cdots 第j行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

显然 $D=0$，将 D 按第 j 行展开，则有

$$D=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$

类似可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

我们引入 Kronecker 符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j, \\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ 于是综合定理 1.3 和定理 1.4 的结果，可写成

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j; \\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j; \\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

例 2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 我们把第 3 行其余元素变为 0，然后按第 3 行展开.

$$D\overset{\substack{c_1-2c_3 \\ c_4+c_3}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+6 & 2 & -2 \\ 2 & a-3 & -4 \\ -2 & -4 & a-3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{D}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix} a-6 & 2 & -2 \\ 2 & a-3 & -4 \\ 0 & a-7 & a-7 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}\begin{vmatrix} a-6 & 4 & -2 \\ 2 & a+1 & -4 \\ 0 & 0 & a-7 \end{vmatrix}$$

$$=(a-7)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a-6 & 4 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix}=(a-7)^2(a+2).$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开

$$\boldsymbol{D}=a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 5 计算 $2n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & & & & 0 & b \\ 0 & a & & & & b & 0 \\ & & & a & b & & \\ & & & & & & \\ & & & c & d & & \\ 0 & c & & & & d & 0 \\ c & 0 & & & & 0 & d \end{vmatrix}$$

未写出的元素全是 0.

解 按第一行展开

$$\boldsymbol{D}_{2n}=a(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & ⋰ & & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c & & & & d & 0 \\ 0 & & & & 0 & d \end{vmatrix}}_{2n-1}$$

$$+b(-1)^{1+2n}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ & & \ddots & & \iddots & \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c & & & & d \\ c & 0 & & & & 0 \end{vmatrix}}_{2n-1}.$$

将上式中的两个 $2n-1$ 阶行列式都按第 $2n-1$ 行展开

$$\boldsymbol{D}_{2n}=ad(-1)^{(2n-1)+(2n-1)}\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & a \quad b & & \\ & & c \quad d & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & & & d \end{vmatrix}}_{2n-2}$$

$$-bc(-1)^{(2n-1)+1}\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & a \quad b & & \\ & & c \quad d & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & & & d \end{vmatrix}}_{2n-2}$$

$$=(ad-bc)\boldsymbol{D}_{2(n-1)}.$$

以此作为递推公式，且知

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{2n}&=(ad-bc)\boldsymbol{D}_{2n-2}=(ad-bc)^2\boldsymbol{D}_{2n-4}\\&=\cdots=(ad-bc)^{n-1}\boldsymbol{D}_{2n-2(n-1)}\\&=(ad-bc)^{n-1}\boldsymbol{D}_2=(ad-bc)^n.\end{aligned}$$

例 6　证明 n 阶范德蒙（Vandermonde）行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

其中符号 $\prod$ 表示全体同类因子的连乘积，

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 2}(a_i-a_j)=a_2-a_1\ ;$$

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 3}(a_i-a_j)=(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)\ ;$$

$\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)$ 是 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个因子的连乘积.

证 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 2}(a_i-a_j)\ ,$$

等式成立.

假设对 $n-1$ 阶范德蒙行列式等式是成立的，即

$$\boldsymbol{D}_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & \cdots & a_n^{\ 2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{\ n-2} & a_2^{\ n-2} & \cdots & a_n^{\ n-2}\end{vmatrix}=\prod_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)\ .$$

下面证明对 n 阶范德蒙行列式等式也是成立的. 为此，从 $\boldsymbol{D}_n$ 的第 n 行开始，依次将下面一行减去上面一行的 a_1 倍，得

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_2^{\ n-2}(a_2-a_1) & a_3^{\ n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{\ n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}.$$

再按第一列展开. 并把 $a_{11}=1$ 的余子式 $\boldsymbol{M}_{11}$ 中各列的公因子提出，就有

$$\boldsymbol{D}_n=(a_n-a_1)\cdots(a_3-a_1)(a_2-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \cdots & a_n^{\ 2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_2^{\ n-2} & a_3^{\ n-2} & \cdots & a_n^{\ n-2}\end{vmatrix}.$$

等式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式，由假设它等于 $\prod\limits_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)$ ，所以

$$\boldsymbol{D}_n=(a_n-a_1)\cdots(a_3-a_1)(a_2-a_1)\prod_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

习题 1.3

1．计算下列各行列式

（1）$\begin{vmatrix}a-2 & -3 & -2\\ -1 & a-8 & -2\\ 2 & 14 & a+3\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 6 & 2 \\ 5^2 & 8^2 & 6^2 & 2^2 \\ 5^3 & 8^3 & 6^3 & 2^3 \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

2．若$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$，求$x$的值.

3．计算下列行列式

（1）$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是$a$，未写出的元素都是 0；

（2）$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{D}_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\quad (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\neq 0)$.

第四节　克莱姆法则

含有n个未知数x_1，x_2，$\cdots$，x_n的n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.7}$$

称为非齐次线性方程组．如果$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，对应的方程组称为齐次线性方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.8}$$

对于n个未知数n个方程的线性方程组，如果满足一定条件，它的解可用行列式表示，这就是下面的克莱姆法则.

克莱姆法则　如果线性方程组（1.7）的系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么，方程组（1.7）有唯一解

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{\boldsymbol{D}_n}{\boldsymbol{D}}. \tag{1.9}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_j=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

证 首先验证（1.9）确是（1.7）的解，这就是把（1.9）代入（1.7），看能否使每个方程都变成恒等式．将（1.9）代入第 i 个方程左端，有

$$a_{i1}\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}+a_{i2}\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}+\cdots+a_{in}\frac{\boldsymbol{D}_n}{\boldsymbol{D}}=\frac{1}{\boldsymbol{D}}(a_{i1}\boldsymbol{D}_1+a_{i2}\boldsymbol{D}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{D}_n)$$

将 $\boldsymbol{D}_j$ 按第 j 列展开，注意到 $\boldsymbol{D}_j$ 除去第 j 列，其他元素和 $\boldsymbol{D}$ 相同，$\boldsymbol{D}_j$ 的第 j 列元素的代数余子式就是 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 列元素的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{1j}$，$\boldsymbol{A}_{2j}$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}_{nj}$，再由定理 1.3 和定理 1.4，可得第 i 个方程的

$$\begin{aligned}
\text{左端}=&\frac{1}{\boldsymbol{D}}[a_{i1}(b_1\boldsymbol{A}_{11}+b_2\boldsymbol{A}_{21}+\cdots+b_i\boldsymbol{A}_{i1}+\cdots+b_n\boldsymbol{A}_{n1})+\\
&a_{i2}(b_1\boldsymbol{A}_{12}+b_2\boldsymbol{A}_{22}+\cdots+b_i\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+b_n\boldsymbol{A}_{n2})+\cdots+\\
&a_{in}(b_1\boldsymbol{A}_{1n}+b_2\boldsymbol{A}_{2n}+\cdots+b_i\boldsymbol{A}_{in}+\cdots+b_n\boldsymbol{A}_{nn})]\\
=&\frac{1}{\boldsymbol{D}}[b_1(a_{i1}\boldsymbol{A}_{11}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{12}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{1n})+b_2(a_{i1}\boldsymbol{A}_{21}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{22}\\
&+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{2n})+\cdots+b_i(a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in})\\
&+\cdots+b_n(a_{i1}\boldsymbol{A}_{n1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{n2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{nn})]\\
=&\frac{1}{\boldsymbol{D}}[b_1\cdot 0+b_2\cdot 0+\cdots+b_i\boldsymbol{D}+\cdots+b_n\cdot 0]\\
=&\frac{1}{\boldsymbol{D}}b_i\boldsymbol{D}=b_i=\text{右端}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
\end{aligned}$$

这就验证了（1.9）确是（1.7）的解.

再证唯一性，设 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$\cdots$，$x_n=c_n$ 是（1.7）的一个解，只要证明必有

$$c_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\quad c_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\quad \cdots,\quad c_n=\frac{\boldsymbol{D}_n}{\boldsymbol{D}}$$

即可，为此，将 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$\cdots$，$x_n=c_n$ 代入（1.7），（1.7）变成了 n 个恒等式

$$\begin{cases}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1j}c_j+\cdots+a_{1n}c_n=b_1,\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2j}c_j+\cdots+a_{2n}c_n=b_2,\\ \cdots\\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nj}c_j+\cdots+a_{nn}c_n=b_n.\end{cases} \tag{1.10}$$

再用 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 列元素的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{1j}$，$\boldsymbol{A}_{2j}$，…，$\boldsymbol{A}_{nj}$ 依次乘（1.10）各式两边，得

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{A}_{1j}c_1 + a_{12}\boldsymbol{A}_{1j}c_2 + \cdots + a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}c_j + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{A}_{1j}c_n = b_1\boldsymbol{A}_{1j}, \\ a_{21}\boldsymbol{A}_{2j}c_1 + a_{22}\boldsymbol{A}_{2j}c_2 + \cdots + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j}c_j + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{A}_{2j}c_n = b_2\boldsymbol{A}_{2j}, \\ \quad\cdots \\ a_{n1}\boldsymbol{A}_{nj}c_1 + a_{n2}\boldsymbol{A}_{nj}c_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}c_j + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{A}_{nj}c_n = b_n\boldsymbol{A}_{nj}. \end{cases}$$

将这 n 个等式两边分别相加，有

$$c_1(a_{11}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{21}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{A}_{nj}) + c_2(a_{12}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{22}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{A}_{nj}) + \cdots +$$
$$c_j(a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}) + \cdots + c_n(a_{1n}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2n}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{A}_{nj})$$
$$= b_1\boldsymbol{A}_{1j} + b_2\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + b_n\boldsymbol{A}_{nj}$$

根据定理 1.3 和定理 1.4 及 $\boldsymbol{D}_j$ 的结构，就得

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_j \cdot \boldsymbol{D} + \cdots + c_n \cdot 0 = \boldsymbol{D}_j$$

而 $\boldsymbol{D} \neq 0$，所以

$$c_j = \frac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

显然对于齐次方程组（1.8），当系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$ 时，只有零解. 因而，若齐次线性方程组（1.8）有非零解，则它的系数行列式必为零. 关于线性方程组的相关内容将在第三章详细讨论.

用克莱姆法则解线性方程组不是件容易的事，因为计算行列式本身就很麻烦，再者，它要求方程的个数和未知数个数相等，且系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$. 但是，克莱姆法则在理论上有重要作用.

例 1 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \qquad\quad - 6x_4 = 9 \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解 因为

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{2+2}(-1) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

可知方程组有唯一解，又因

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$\boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27$$

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81$$

所以

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=3,\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=-4,\quad x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}=-1,\quad x_4=\frac{\boldsymbol{D}_4}{\boldsymbol{D}}=1.$$

例 2 当 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0 \\ 2x+(6-\lambda)y=0 \\ 2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}$$

有非零解？

解 由克莱姆法则知，题给方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$ 时，方程组只有零解，要使方程组有非零解，必须使 $\boldsymbol{D}=0$，而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &=2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6-\lambda & 0 \end{vmatrix}+(4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &=-2\times 2(6-\lambda)+(4-\lambda)[(5-\lambda)(6-\lambda)-4] \\ &=(5-\lambda)(8-\lambda)(2-\lambda)\end{aligned}$$

所以，当 $\lambda=5$，或 $\lambda=8$，或 $\lambda=2$ 时，该齐次方程组有非零解.

习题 1.4

1．用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-\ \ x_2+3x_3-2x_4=-6\\ x_1+7x_2+\ \ x_3-\ \ x_4=5\\ 3x_1+5x_2-5x_3+3x_4=19\\ x_1-\ \ x_2-2x_3+\ \ x_4=4\end{cases}$$

2．当λ为何值，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2+4x_3=0\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解？当λ取何值时，它只有零解？

3．用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases}-x+y+z+t=a\\ x-y+z+t=b\\ x+y-z+t=c\\ x+y+z-t=d\end{cases}$$

第五节　向量及行列式在运动学、牛顿力学中的应用

量之间的线性关系，是线性代数这门课程研究的主要内容. 而线性代数中的关于向量的内容、方法，也是广泛地被应用于多种学科的研究中. 大家熟知的物理学课程，特别是运动学、牛顿力学的内容中，矢量、矢量间的运算、矢量间的线性关系等更是重要的数学工具. 行列式的表述、行列式的运算，也是其数学工具之一. 本节介绍的内容，具体地体现了线性代数方法应用的一个方面.

为了描述物体在空间中的位置，并将其量化表示，空间直角坐标系$o-xyz$应运而生.

物理学中，在特定的坐标系$o-xyz$中，质点$P(x，y，z)$对应的位置矢量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$表示为$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$式中$\boldsymbol{i}，\boldsymbol{j}，\boldsymbol{k}$分别为沿$x，y，z$轴的单位矢量，引入时间变量$t$后，质点位置矢量$\boldsymbol{r}$随时间变化而改变，

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}.$$

质点的运动轨迹，引入矢量后，质点从t时到$t+\Delta t$时刻的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t).$$

一、质点运动的速度

质点运动的平均速度$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，其不仅包含运动速度的大小，还有运动的方向.

质点在t时刻的瞬时速度

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{v}$沿三个坐标轴的投影为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为 $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}$ ，其方向由三个方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

确定.

二、质点运动的加速度

平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ ，瞬时加速度，即加速度

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其中，

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

分别为加速度在 x,y,z 轴上的投影，加速度大小为

$$a=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}.$$

三、叠加运动方程

抛体运动中，质点在任一时刻的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

质点在任一时刻的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+gt.$$

四、牛顿运动定律

1. 牛顿第一定律（即惯性定律）

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到其他物体所作用的力迫使它改变这种状态为止. 其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=0\text{ 时，}\boldsymbol{v}\text{ 为常矢量.}$$

2. 牛顿第二定律

物体受到作用力时，它所获得的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小与物体所受的合外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与合外力 $\boldsymbol{F}$ 的方向相同. 其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=km\boldsymbol{a}$$

比例系数 k 与力、质量和加速度的单位有关，m 为物体的质量.

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

$$F_x = ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$F_y = ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$F_z = ma_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

3. 牛顿第三定律

当物体 A 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用于物体 B 时，物体 B 也必定以力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用于物体 A，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 总是大小相等、方向相反，作用在一条直线上. 其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2.$$

五、物体运动转动定理

物体做定轴转动时，物体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积等于物体所受外力的合力矩. 其数学表达式为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}\alpha$$

其中，$\boldsymbol{J}$ 为转动惯量，α为角加速度，$\boldsymbol{M}$ 为合外力矩.

高中物理学中，关于力 $\boldsymbol{F}$，力臂 $\boldsymbol{r}$，力矩 $\boldsymbol{M}$ 的关系中，有如下的讨论（图 1-2）.

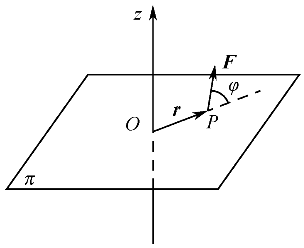


图 1-2

转轴 Oz 正垂直于平行面π，力臂 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{op}$ 在平面内，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 P 点，$\boldsymbol{F}$ 在平面π内，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的交角为 φ. 此时，按转动定理，转动力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{rF}$$

$\boldsymbol{M}$ 的正方向按右手螺旋定则确定，它的大小为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Fr}\sin\varphi$$

以上，是大家在高中课本中所熟知的.

特别地，记

$$\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$$

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

可用行列式计算力矩 $\boldsymbol{M}$,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{rF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} k$$

$$= (r_yF_z - r_zF_y)i + (r_zF_x - r_xF_z)j + (r_xF_y - r_yF_x)k$$

以上结果，由于线性代数方法的引入，力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向性、数量大小更加数学化，与矢量叉乘的数学运算规则完全一致.

第一章自测题

一、单项选择题

1．当 $a=$（　　）时，行列式 $\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix}=0$．

A．-1　　B．1　　C．2　　D．0

2．如果行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=d$，则 $\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}=$（　　）．

A．$-6d$　　B．$6d$　　C．$4d$　　D．$-4d$

3．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=$（　　）．

A．5!　　B．$-5!$　　C．4!　　D．$-4!$

4．当 $x=$（　　）时，行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & x \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix}=0$．

A．5　　B．-5　　C．4　　D．任意实数

5．已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-2$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{31}-2a_{21} & a_{13} \\ a_{12} & 3a_{32}-2a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & 3a_{33}-2a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）．

A．18　　B．-18　　C．12　　D．-12

6．已知 m 阶行列式 $|A|=2$，n 阶行列式 $|B|=-2$，则 $m+n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=$（　　）．

A．0　　B．-1　　C．4　　D．-4

7．下列论断错误的是（　　）．

A．行列式 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式等于其余子式乘以 $(-1)^{i+j}$．

B．将行列式 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素乘以 2，第二行元素乘以 $\frac{1}{2}$，行列式值不变.

C．行列式转置后的值等于原行列式值的相反数.

D．将行列式的第一行和第二行对换，再将行列式的第一列与第二列对换，其值不变.

8．$\lambda \neq$（　　）时，下列方程组只有零解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．已知四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第三列元素依次为−1、2、0、1，它们的余子式分别为 5、3、−7、4，则 $\boldsymbol{D}$ 的值等于（　　）.

A．−15　　B．15　　C．0　　D．1

10．下列行列式中 x 的系数为（　　）.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

A．1　　B．−1　　C．4　　D．−4

二、判断题

1．两个行列式相等，则它们的阶一定相等.（　　）

2．若 n 阶行列式中等于零的元素比 n^2-n 多，则此行列式等于零.（　　）

3．若行列式的主对角线上的元素全为零，则行列式一定等于零.（　　）

4．若行列式中有一行（列）的所有元素都是零，则行列式等于零.（　　）

三、解答题

1．按自然数从小到大的排列为标准排列次序，求下列各排列的逆序数

（1）315462；（2）518694237；（3）$(n-1)(n-2)\cdots 321n$.

2．计算下列各行列式

（1）$\begin{vmatrix} e^{x+y} & e^x-1 \\ e^x+1 & e^{x-y} \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix}$.

3．证明下列等式

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

4．计算下列各 n 阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

5．设 $F(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$，其中 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1} 是互不相同的数.

试说明 $F(x)$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式，并求出方程 $F(x)=0$ 的全部根.

6．用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=-2 \\ x_2+5x_3+6x_4=2 \\ x_3+5x_4+6x_5=-2 \\ x_4+5x_5=-4 \end{cases}$$

7．设 $\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式（i，$j=1$，2，3，4），试证

$$\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}=0\ .$$

8．当 λ,μ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\mu x_2+x_3=0 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解?

第二章　矩　阵

矩阵是代数特别是线性代数主要的研究对象，作为一种重要的数学工具，广泛应用于自然科学的各个分支及经济分析、经济管理等许多领域．本章主要介绍矩阵的概念及特殊矩阵，矩阵的运算及其性质，矩阵的初等变换，逆矩阵存在的条件及其性质，矩阵的秩等内容.

第一节　矩阵的概念

一、矩阵的概念

引例 1　方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

是否有解？如果有解，到底有多少个解，解是什么等问题，完全取决于方程组中未知量系数及常数项，按方程组的顺序可以组成一个 4 行 5 列的矩形数表如下.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

引例 2　假设甲、乙、丙、丁 4 名学生 3 门课程的期末成绩如表 2-1 所示.

表 2-1　期末成绩

课程 / 学生	数学	语文	英语
甲	90	80	95
乙	80	75	70
丙	95	90	96
丁	70	80	78

更简单地，将这个表也可以写成矩形数表的形式

$$\begin{bmatrix} 90 & 80 & 95 \\ 80 & 75 & 70 \\ 95 & 90 & 96 \\ 70 & 80 & 78 \end{bmatrix}$$

像上述两例中的这种矩形数表在数学上被称为矩阵.

定义 2.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=12,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$）排成的 m 行 n 列的数表（用方括号或圆括号表示），即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{或} \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵. 这些 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 一般用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A}$（或(a_{ij})），$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$…表示一个矩阵. 为了表明矩阵的行数和列数，也可写成 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$.

引例 1 中的数表是 4×5 的矩阵，$a_{31}=3$；引例 2 中的数表是 4×3 的矩阵，$a_{23}=70$.

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，且它们的对应元素相等即

$$a_{ij}=b_{ij}\text{（}i=12,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\text{）},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

下面介绍几种特殊矩阵.

1．若矩阵的所有元素都是零，则称矩阵为零矩阵，记作 $\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

2．当 $m=1$ 时，矩阵只有一行

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为行矩阵.

3．当 $n=1$ 时，矩阵只有一列

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为列矩阵.

4．当 $m=n$ 时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

5．当 $m=n=1$ 时，

$$\boldsymbol{A}=(a)=a \text{ 或 } \boldsymbol{A}=[a],$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为一阶方阵.

6．形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵称为上三角形矩阵.

7．形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵称为下三角形矩阵.

8．形如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵称为 n 阶对角形矩阵.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时，即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵，简记作 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{I}$）.

二、矩阵与线性变换

在许多问题中（如平面解析几何中的坐标轴平移变换），会遇到一些变量要用另外一些变量线性表示. 设变量 y_1，y_2，…，y_m 能用变量 x_1，x_2，…，x_n 线性表示，即

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \qquad\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 a_{ij} 是常数（$i=1，2，\cdots，m；j=1，2，\cdots，n$）. 式（2.1）称为从变量 x_1，x_2，…，x_n 到变量 y_1，y_2，…，y_m 的线性变换.

线性变换式（2.1）的系数所构成的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为系数矩阵. 很明显，给定了线性变换式（2.1），它的系数矩阵是唯一确定的；反之，如果给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就唯一被确定. 在这个意义上，线性变换和矩阵之间存在着一一对应的关系，因此可以用矩阵来研究线性变换.

例 1 线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为恒等变换，它对应的矩阵

$$E_n=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

是一个 n 阶单位矩阵.

例 2 线性变换 $\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \\ \quad \cdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$ 对应于 n 阶方阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

这个方阵的特点是，不在主对角线上的元素都是零，这种方阵称为对角阵.

习题 2.1

1．设线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \cdots \\ y_m = a_{mn}x_n \end{cases}$$

试写出该变换对应的系数矩阵.

2．已知线性变换 $\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ x_2 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_3 = 3y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}$

求从变量 x_1，x_2，x_3 到变量 y_1，y_2，y_3 的线性变换及相对应的系数矩阵.

3．若已知对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

试写出它所对应的线性变换.

4．若已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}$$

试写出它所对应的线性变换.

第二节 矩阵的运算

一、矩阵的加法

矩阵的各种运算，都是从实际问题中抽象出来的. 例如，在第一节引例 2 中，设期末成绩矩阵为 $\boldsymbol{A}$，如果知道该 4 名同学期中成绩矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}94 & 90 & 97\\ 83 & 85 & 76\\ 98 & 95 & 97\\ 60 & 70 & 72\end{bmatrix}$$

则每个学生的总成绩表示为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}90 & 80 & 95\\ 80 & 75 & 70\\ 95 & 90 & 96\\ 70 & 80 & 78\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}94 & 90 & 97\\ 83 & 85 & 76\\ 98 & 95 & 97\\ 60 & 70 & 72\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}184 & 170 & 192\\ 163 & 160 & 146\\ 193 & 185 & 193\\ 130 & 150 & 160\end{bmatrix}$$

定义 2.2 设有两个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

平面几何中坐标平移变换公式

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

可以用矩阵相加表示

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

两个矩阵必须在行数与列数分别相等的情况下才能相加，矩阵的加法满足如下运算规律.

（1）交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

显然，$\boldsymbol{A}+0=0+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

我们称矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$.

因此，可利用负矩阵定义矩阵的减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

显然，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=0$.

因此，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$ 与 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 是等价的.

二、数与矩阵的乘法

定义 2.3 设 k 是一个数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称矩阵

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，即

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

数与矩阵的乘法满足如下运算规律（k，l，λ 为数）.

（1）分配律 $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（2）结合律 $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

（3）$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$；

（4）若 $k\boldsymbol{A}=0$，$k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=0$.

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\2&4&6&8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7&5&-2&4\\5&1&9&7\\3&2&-1&6\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 $$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&6&-4&4\\4&-4&2&-2\\1&-2&-7&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&-2&2\\2&-2&1&-1\\\frac{1}{2}&-1&-\frac{7}{2}&-1\end{bmatrix}.$$

三、矩阵的乘法

某校明后两年计划建造教学楼与宿舍楼，建筑面积（单位：100m^2）及材料耗用量的矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{教学楼} & \text{宿舍楼}\end{array} \\ A= & \begin{bmatrix}20&10\\30&20\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{明年}\\\text{后年}\end{array}\end{array}$$

材料（每 100m^2 建筑面积）的平均耗用量的矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{钢材} & \text{水泥} & \text{铝材}\end{array} \\ B= & \begin{bmatrix}2&18&0.4\\1.5&15&0.5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{教学楼}\\\text{宿舍楼}\end{array}\end{array}$$

因此，明后两年三种建筑材料的耗用量的矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{钢材} & \text{水泥} & \text{铝材}\end{array} \\ C= & \begin{bmatrix}20\times2+10\times1.5 & 20\times18+10\times1.5 & 20\times0.4+10\times0.5\\30\times2+20\times1.5 & 30\times18+20\times15 & 30\times0.4+20\times0.5\end{bmatrix}\end{array}$$

那么，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.

定义 2.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是一个 $s\times n$ 矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{bmatrix},$$

称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

根据矩阵乘法的定义，只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时才能相乘，且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{C}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数，即 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，称 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$）的积.

例 2 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ -5 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}，求 AB.$$

解

$$AB=\begin{bmatrix}1\times2+3\times3 & 1\times(-1)+3\times1 & 1\times(-1)+3\times(-2)\\ 2\times2+(-1)\times3 & 2\times(-1)+(-1)\times1 & 2\times(-1)+(-1)\times(-2)\\ (-5)\times2+0\times3 & (-5)\times(-1)+0\times1 & (-5)\times(-1)+0\times(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 2 & -7\\ 1 & -3 & 0\\ -10 & 5 & 5\end{bmatrix}.$$

在线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{2.2}$$

中，若令

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

则方程组（2.2）可表示为矩阵形式 $AX=B$，称 A 为方程组的系数矩阵.

平面解析几何中，坐标旋转变换公式

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$$

可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

例 3 设

$$A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix},$$

求乘积 AB 与 BA.

解

$$AB=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$$BA=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & \cdots & y_nx_n \end{bmatrix}$$

此例说明，在一般情况下，矩阵的乘法不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

1．对于矩阵的乘法还应指出

（1）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，一般不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

（2）由（1）可知，在等式 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AB}$ 中，当 $\boldsymbol{A}\neq 0$ 时，一般不会推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，虽有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

2．矩阵的乘法满足下列运算规律（假设运算都是可行的）

（1）结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

（3）$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$（$k$ 为任意的数）.

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$$

或简写成

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$$

有了矩阵的乘法，就可以定义 n 阶方阵的幂，设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 是自然数，定义

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k}.$$

这就是说 $\boldsymbol{A}^k$ 就是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘. 方阵的幂满足以下运算规律

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$

其中 k，l 为自然数. 因为矩阵乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般说来 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

四、矩阵的转置

定义 2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换，得到一个 $n\times m$ 矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

例如，设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

1．矩阵的转置满足如下运算规律

（1）$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

（2）$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

（3）$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；

（4）$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证（1）（2）（3）显然成立，现证（4）成立.

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，$(AB)^{\mathrm{T}}$ 是一个 $n\times m$ 矩阵，而 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 就是矩阵 AB 的第 j 行第 i 列的元素，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

又知，$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 是一个 $n\times m$ 的矩阵，$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列的元素 d_{ij} 等于 B^{T} 的第 i 行与 A^{T} 的第 j 列对应元素乘积之和，因而 d_{ij} 等于 B 的第 i 列与 A 的第 j 行对应元素的乘积之和，即

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

由此可知，$(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 同为 $n\times m$ 矩阵，且其对应元素都相等，因而 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

2．对称矩阵和反对称矩阵

（1）设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，称 A 为对称矩阵. 显然，对称矩阵 A 的元素关于主对角线是对称相等的，如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

均为对称矩阵.

例 4 设 A 与 B 是两个 n 阶对称矩阵，证明：等式 AB=BA 成立的充要条件是 AB 为对称矩阵.

证 必要性 因 A 与 B 为两个 n 阶对称矩阵，所以 AB 与 BA 皆为 n 阶方阵，又因 $A^{\mathrm{T}}=A$，$B^{\mathrm{T}}=B$. 所以当 AB=BA 时，则有

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB},$$

这表明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵，

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$$

成立.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 显然，反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角上的元素均为零.

例如

$$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix}$$

均为反对称矩阵.

五、共轭矩阵

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复矩阵时，$\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵.

显然，当 a_{ij} 为实数时，则有 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$.

共轭矩阵满足如下运算规律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

（1）$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$；（2）$\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{A}}$；（3）$\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.

习题 2.2

1．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix},$$

求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

2．求下列乘积

（1）$\begin{bmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$；　　（2）$\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}$；　　（4）$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n$.

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$，问

（1）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗？

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗？

（3）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗？

4．举反例说明下列命题是错误的

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=0$，则 $\boldsymbol{A}=0$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

（3）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq 0$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

5．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

6．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^k$.

7．求证

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

8．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

9．如果矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

10．对于任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，证明

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵；

（2）$\boldsymbol{A}$ 必可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

11．设线性变换

$$\begin{cases} z_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n \\ z_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n \\ \qquad\cdots \\ z_m=a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1s}x_s \\ y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2s}x_s \\ \qquad\cdots \\ y_n=b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{ns}x_s \end{cases}$$

试用矩阵乘积的形式表示由变量 x_1，x_2，$\cdots x_s$ 到变量 z_1，z_2，$\cdots z_m$ 的线性变换.

第三节　矩阵的初等变换

定义 2.6　下面三种变换称为矩阵的初等行变换

（1）对调两行（对调 i，j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$）；

（2）用数 $k\neq 0$ 乘矩阵的某一行中的所有元素（第 i 行乘 k，记作 $r_i\times k$）；

（3）用数 k 乘矩阵的某一行的所有元素加到另一行的对应元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$ ）.

把定义中的“行”换成“列”，就是矩阵的初等列变换的定义（所用记号是把 r 换成 c ）. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

显然，三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换，变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \left(\dfrac{1}{k}\right)$；变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$.

定义 2.7 对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 施行一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵. 三种初等变换对应着三种初等矩阵.

（1）对调两行（两列），例如对调 $\boldsymbol{E}$ 中第 i，j 两行（ $r_i \leftrightarrow r_j$ ），得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,\ j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{2.3}$$

$\uparrow$ 第i列　$\uparrow$ 第j列

（2）用数 $k \neq 0$ 乘某行（某列），例如用 $k \neq 0$ 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行($r_i \times k$)，得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{2.4}$$

$\uparrow$ 第i列

（3）用数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上去，例如用数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上（ $r_i + kr_j$ ），得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(j(k),\ i)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&0&\cdots&k&&\\&&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\leftarrow 第i行\\\\\leftarrow 第j行\\\\\\\end{matrix} \tag{2.5}$$

$$\qquad\qquad\uparrow\qquad\quad\uparrow$$
$$\qquad\qquad 第i列\qquad 第j列$$

容易验证，初等矩阵具有下面特性. 用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_m(i,j)$ 左乘 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ ，得

$$\boldsymbol{E}_m(i,\ j)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow 第j行\\\\\leftarrow 第i行\\\\\\\end{matrix}$$

用 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,\ j)$ 右乘 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ ，得

$$\boldsymbol{AE}_n(i,\ j)=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2j}&\cdots&a_{2i}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mj}&\cdots&a_{mi}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\qquad\uparrow\qquad\quad\uparrow$$
$$\qquad 第j列\qquad 第i列$$

这表明，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{E}_m$（i，j），结果相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作第一种初等行变换 $r_i\leftrightarrow r_j$；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{E}_n(i,\ j)$，结果相当于对 $\boldsymbol{A}$ 施行第一种初等列变换 $c_i\leftrightarrow c_j$. 初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i(k))$ 和 $\boldsymbol{E}(j(k))$ 也有同样的结果.

定理 2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行（列）变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左（右）边乘以相应的 m（n）阶初等矩阵.

初等变换是矩阵的一种基本运算，有着很重要的应用，可以用来求逆矩阵，这将在本章第三节中进行介绍.

定义 2.8 具有以下两个特点的矩阵称为行阶梯形矩阵

（1）各行首非零元的列标，小于它下一行首非零元的列标；

（2）矩阵中如果有零行，那么零行位于矩阵的最下方.

例如，矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&0&-2\\0&-1&3&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$是行阶梯形矩阵，

而$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&8&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$不是行阶梯形矩阵.

定理 2.2 任何一个矩阵 A，经过有限次初等行变换，都可以化为行阶梯形矩阵.

我们称 A 经有限次初等行变换化为的行阶梯形矩阵为 A 的行阶梯形矩阵.

例 1 将矩阵$A=\begin{bmatrix}0&1&5&-1\\1&2&3&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\end{bmatrix}$化为行阶梯形矩阵.

解

$$A=\begin{bmatrix}0&1&5&-1\\1&2&3&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_3-3r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&-4&-8&4\\0&-5&-13&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+5r_2]{r_1+4r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&12&0\\0&0&12&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&12&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

矩阵$\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&12&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$即为 A 的阶梯形矩阵. 将此矩阵继续作初等行变换还可以化为

$$\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&12&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{12}r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-5r_3}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

第二次变换过程中的每个矩阵，都是 A 的行阶梯形矩阵. A 的行阶梯形矩阵不是唯一的，最后一个行阶梯形矩阵称为 A 的行最简形矩阵.

在 $m\times n$ 的行阶梯形矩阵中，如果各行的首非零元全为 1，而首非零元所在列的其余元素全为零，形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{rr+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

那么称此矩阵为行最简形.

推论　任何一个矩阵，经有限次行初等行变换，都可以化为行最简形.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为的行最简形称为 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形.

由推论可知，任何一个矩阵都可以通过初等行变换化为行最简形矩阵，一个满秩 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵，是一个 n 阶单位阵.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，记 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$，此为 $n\times 2n$ 矩阵.

例 2　将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 化为最简形矩阵.

解　先用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再进行如下初等行变换化为最简形矩阵，即

$$\xrightarrow[-1\times r_2]{\substack{r_1+2r_2 \\ r_2-r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

习题 2.3

1．求下列矩阵的行阶梯形矩阵

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2．求下列矩阵的行最简形矩阵

（1）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

第四节 逆矩阵

一、矩阵的行列式

定义 2.9 由 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}_r = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

所确定的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的（或退化的）.

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的（或非退化的）.

1．n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 满足如下运算规律

（1）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

（2）$|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$（$\lambda$ 为常数）；

（3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵）.

2．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，且 $\boldsymbol{AA}^{**}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

实际上，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{AA}^*=(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots),$$

所以

$$AA^* = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

类似地，

$$A^*A = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}\right] = \left[|A|\delta_{ij}\right] = |A|E.$$

二、逆矩阵

定义 2.10　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$AB = BA = E\ ,$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个可逆矩阵，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

1．可逆矩阵具有下列性质

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的. 事实上，若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则

$$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B\ .$$

我们用 A^{-1} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $B = A^{-1}$.

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 A^{-1} 也为可逆矩阵，且 $(A^{-1})^{-1} = A$，这是因为 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$，A与A^{-1}互为逆矩阵.

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，常数 $\lambda \neq 0$，则 λA 为可逆矩阵，且 $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$. 事实上，

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = E\ .$$

（4）若 A,B 为同阶矩阵且均可逆，则乘积 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 事实上，

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E\ ,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

因此，由逆矩阵的唯一性可知，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

（5）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 A^{T} 也可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. 事实上，

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\ ,$$

又因为 $(AA^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E$，$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = E$，则 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

2．对于任意给定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，满足什么条件，它可逆；若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，如何求它的逆矩阵.

定理 2.3　设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施以若干次初等变换后变为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 仍为可逆矩阵.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，由定理 2.1 知，存在若干个初等矩阵 P_1，P_2，…，P_l，Q_1，Q_2，…Q_s，使

$$P_1P_2\cdots, P_lAQ_1Q_2\cdots Q_s = B.$$

因为 P_1，P_2，…，P_l，A，Q_1，Q_2，…Q_s 皆可逆，则其乘积也可逆，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

推论　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换，可化为 n 阶单位矩阵 E_n，即 $A \sim E_n$.

证　设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

因$|A|\neq 0$，故A的第一列中至少有一个元素不为 0，不妨设$a_{11}\neq 0$（否则总可以通过初等变换调换行的次序把不为 0 的元素调到矩阵左上角的位置），并用$-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$乘以第一行加到第i行上($i=1, 2, \cdots, n$)，再用$-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$乘以所得矩阵的第一列加到第j列上($i=1, 2, \cdots, n$)，然后，用$\dfrac{1}{a_{11}}$乘第一行. 这样，矩阵A化为

$$A\sim A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix},$$

其中，B_1是$(n-1)\times(n-1)$矩阵，显然$B_1\neq \boldsymbol{0}$，否则$|A|\neq \boldsymbol{0}$与推论所设矛盾. 这样B_1的第一列中至少有一个元素不为 0，那么用上述的方法继续做下去，最后，把n阶矩阵化为主对角线皆为 1，其余元素皆为 0 的n阶单位矩阵E_n.

定理 2.4 设A为可逆矩阵，则存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_l$使

$$A=P_1P_2\cdots P_l.$$

证 因$A\sim E$，E经有限次初等变换可变成A，也就是存在有限个对应的初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_l$，使

$$P_1P_2\cdots P_rEP_{r+1}\cdots P_l=A,$$

即$A=P_1P_2\cdots P_l$.

推论 $m\times n$矩阵$A\sim B$的充分必要条件是：存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使$PAQ=B$.

下面介绍用矩阵的初等行变换求可逆矩阵的方法.

当矩阵A可逆时，即$|A|\neq 0$，由定理 2.3 知，

$$A=P_1P_2\cdots P_l,$$

因此

$$(P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1})A=E, \tag{2.6}$$

由定义 2.10 可知

$$(P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1})E=A^{-1}, \tag{2.7}$$

说明对A进行一系列的初等行变换将A变成单位矩阵E时，对E进行同样的初等行变换，就得到A的逆矩阵A^{-1}.

由此得到用初等行变换求逆阵的方法：将A与单位矩阵E组成$n\times 2n$矩阵$(A \mid E)$，对这个矩阵施行初等行变换，当把A化为E时，同时把E化为A^{-1}，即

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A \mid E)=(E \mid A^{-1}).$$

事实上，以B左乘$(A\vdots E)$，得到$B(A\vdots E)=(BA\vdots B)$，这就相当于对$(A\vdots E)$施行一系列初等行变换，得到$(BA\vdots B)$. 特别地，当$B=A^{-1}$时，有$A^{-1}(A\vdots E)=(A^{-1}A, A)=(E, A^{-1})$.

例 1　设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$(A \mid E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]$$

所以，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

例 2　解矩阵方程

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

解　设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}$.

矩阵方程可写为

$$AX=B. \tag{2.8}$$

经计算 $|A|\neq 0$，故 A 可逆. 由定理 2.3 的推论可知，必存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使

$$P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1A=E, \tag{2.9}$$

显然，$P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1=A^{-1}$. 在式（2.8）两边同左乘 $P_l\cdots P_2P_1$ 得

$$(P_l\cdots P_2P_1)AX=(P_l\cdots P_2P_1)B,$$

即得

$$X = A^{-1}B.$$

综上所述，求 $\boldsymbol{X}$ 可利用下面的式子

$$P_l \cdots P_2 P_1 (A \mid B) = (E \mid A^{-1}B).$$

具体解法如下

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

所以

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 2.5 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|A| \neq 0$.

证 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则存在 A^{-1}，使 $AA^{-1}=E$，所以 $|A||A^{-1}| = |E| = 1$，因而 $|A| \neq 0$.

定理 2.6 若 $|A| \neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

其中 A^* 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵.

证 前面已证对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，都成立 $A^*A = AA^* = |A|E$. 若 $|A| \neq 0$，则有

$$\left[\frac{A^*}{|A|}\right]A = A\left[\frac{A^*}{|A|}\right] = E,$$

根据逆矩阵的定义及唯一性知，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

由定理 2.5 和定理 2.6 可知：$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充分必要条件是 $|A| \neq 0$，即可逆矩阵就是非奇异矩阵.

推论 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $AB = E$（或 $BA = E$），则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且 $A^{-1} = B$.

证 若 $AB = E$，则 $|A||B| = 1$，故 $|A| \neq 0$，因而 A^{-1} 存在，于是

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}.$$

应当指出，若 $AB = 0$，当 $A \neq 0$ 时，一般得不到 $B = 0$ 的结论；但当 $|A| \neq 0$ 时，必然有 $B = 0$.

当 $|A| \neq 0$ 时，我们可以定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零次幂和负整数次幂，此时规定

$$A^0 = E,\ A^{-k} = (A^{-1})^k,$$

其中 k 为正整数. 这样，当 $|A| \neq 0$ 且 λ，μ 为整数时，有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}.$$

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因为 $|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$，知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，再计算

$$\begin{array}{lll}A_{11}=2, & A_{21}=6, & A_{31}=-4,\\ A_{12}=-3, & A_{22}=-6, & A_{32}=5,\\ A_{13}=2, & A_{23}=2, & A_{33}=-2,\end{array}$$

得

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

例 4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使其满足 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$.

解 由上例知 $|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$，$|\boldsymbol{B}|=1\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在，对 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘算式两边，而用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘算式两边，可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXBB}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1},$$

故

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}.$$

又

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{3}\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{bmatrix}.$$

例 5 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+8\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=0$，试证 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 由 $\boldsymbol{A}^2+8\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=0$，可得 $\boldsymbol{A}^2+8\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$，即

$$A\left(\frac{A+8E}{3}\right)=E.$$

由定理 2.6 的推论可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{E})$.

习题 2.4

1．求下列矩阵的逆矩阵

（1）$\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$；　　（2）$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{bmatrix}$；　（4）$\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

2．解下列矩阵方程

（1）$\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}$；

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

3．利用逆矩阵求解下列问题

（1）$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2\\2x_1-x_2-3x_3=1\\3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$ 求解 x_1, x_2, x_3.

（2）设线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+x_3\\y_2=2x_1+2x_2+x_3\\y_3=x_1+x_2+x_3\end{cases}$$

求其逆变换，即用 y_1, y_2, y_3 表示 x_1, x_2, x_3 的变换.

4．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

5．设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

6．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明

（1）若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；　（2）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^*|^{n-1}$.

7．设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，求证伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，并且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

第五节　矩阵的秩

定义 2.11　在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列（$k\leqslant m,\ k\leqslant n$），位于这些行列交叉处的 k^2

个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置顺序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 k 阶子式.

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定义 2.12 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 $\boldsymbol{D}$，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在）全等于零，那么称 $\boldsymbol{D}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，而数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于零.

由行列式的展开定理知，在 $\boldsymbol{A}$ 中当有 $r+1$ 阶子式全等于零时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于零，因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$就是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数. 显然，$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&0&4&2\\0&2&-1&5&8\\0&0&4&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 中有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}1&3&0\\1&2&-1\\0&0&4\end{vmatrix}=8\neq 0,$$

而所有的 4 阶子式全等于 0，所以 $R(\boldsymbol{A})=3$.

定理 2.7 矩阵经初等变换后，其秩不变.

证 仅就初等行变换给予证明.

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i,j 两行对调后得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的子式与 $\boldsymbol{A}$ 的相应的子式或相等，或只差一个符号，因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k（$k\neq 0$）后得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\to\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\vdots&\cdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},$$

由行列式的性质可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的子式或与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相应的子式相等，或是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相应的子式的 k 倍，因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

（3）把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行后得到矩阵 $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\to\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}+ka_{i1}&a_{j2}+ka_{i2}&\cdots&a_{jn}+ka_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\leftarrow 第i行\\\\\leftarrow 第j行\\\\\\\end{matrix}$$

设 $R(\boldsymbol{B})=r$，则在 $\boldsymbol{B}$ 中有一个 r 阶子式 $\boldsymbol{D}\neq 0$.

（1）若 $\boldsymbol{D}$ 不含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行元素，那么 $\boldsymbol{D}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 中的一个子式，因此 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$.

（2）若 $\boldsymbol{D}$ 含第 i，j 两行的元素，由行列式的性质可知，$\boldsymbol{D}$ 的值与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中对应的子式的值相等，故 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个不等于零的 r 阶子式，则 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$.

（3）若 $\boldsymbol{D}$ 含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行元素，但不含第 i 行元素，则 $\boldsymbol{D}$ 可拆成两个 r 阶行列式之和，且可写成 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1+k\boldsymbol{D}_2$，其中 $\boldsymbol{D}_1$ 是对应 $\boldsymbol{A}$ 中含第 j 行元素而不含第 i 行元素的 r 阶子式，$\boldsymbol{D}_2$ 或是 $\boldsymbol{A}$ 的子式，或是经过若干次行对调得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶子式，且 $\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$ 不同时为零，否则 $\boldsymbol{D}=0+k0=0$，这与 $\boldsymbol{D}\neq 0$ 矛盾. 这样，$\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 至少有一个是不等于零的 r 阶子式，从而 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个不等于零的 r 阶子式，所以 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$.

综上所述，$R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$，又由于初等变换是可逆的，同理可证 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$. 于是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，这说明初等行变换不改变矩阵的秩. 类似地可以证明，初等列变换也不改变矩阵的秩.

定理 2.7 提供给了求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的一种方法，利用初等行变换把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，其非零行的行数就矩阵的秩.

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 \leftrightarrow r_4}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式中最后一个矩阵称为行阶梯形矩阵，它具有下述特征：每个阶梯只有一行，由这个容易看出非零行的行数为 3，所以 $R(\boldsymbol{A})=3$.

如果对于上式继续做行变换，还可得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形，

$$\text{上式}\xrightarrow[r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_2-\frac{2}{3}r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{9}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

此式再经初等列变换，显然可以得到如下最简形式

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

根据上述例题可知，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换可化为行阶梯形矩阵及行最简形，若再经初等列变换，还可化为如下的最简形式

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{0}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=r$.

特别，当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵时，因 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，知 $R(\boldsymbol{A})=n$．正是由于可逆矩阵的秩等于阶数，故可逆方阵又称满秩矩阵，而奇异矩阵又称秩矩阵.

初等矩阵与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 等价，因此初等矩阵是满秩的，初等矩阵可逆．容易验证

$$\boldsymbol{E}(i,\ j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,\ j),\ \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{E}(j(k),\ i)^{-1}=\boldsymbol{E}(j(-k),\ i).$$

即初等矩阵的逆矩阵仍是初等矩阵.

习题 2.5

1．求下列各矩阵的秩

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{bmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵．证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

第五节　矩阵运算在线性规划中的应用

管理最优化、决策科学化，在当今的社会、经济发展中，已成为人们的共识.

运筹学是达成上述目标的有力工具之一，而线性规划是运筹学的一个重要分支．线性代数，尤其矩阵运算方法是线性规划完成“实际问题→建立数学模型→给出求解模型的算法→

求出模型的最优解→找出解决实际问题的最优解决方案”的重要工具. 正是由于矩阵运算的贡献，使繁复的线性规划的建模和求最优解等问题得到了完美的解决，也使线性规划的应用日益广泛深入.

下面从线性规划的模型建立、求解线性规划的单纯形法两个方面，介绍矩阵运算在线性规划中的应用.

一、线性规划问题的数学模型

线性规划作为运筹学的一个重要分支，已被广泛地应用于各个领域，成为进行单一目标最优化决策的重要方法. 无论是处理宏观经济问题，还是微观经济问题，都取得了重要成果，尤其是电子计算机的运用，更使得这种方法的应用日益广泛深入.

（一）数学模型的建立

用运筹学方法寻求问题的最优决策，首先是建立待决策问题的数学模型. 这里所讲的数学模型，是先分析出实际问题的共性特点，而后用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式、图表、图像及框图等，用来描述实际问题的抽象模型.

生产的组织与计划管理问题、合理下料问题、配料问题、布局问题、运输问题的最优决策问题，都可以用线性规划方法解决.

例 1 （生产计划管理问题）现存有两种原料 A_1、A_2，用其可生产三种产品 B_1、B_2、B_3. 有关资料如表 2-2 所示. 如何安排三种产品的生产量，使各种产品的利润总额最大？

解 设生产 B_1 产品 x_1 单位，B_2 产品 x_2 单位，B_3 产品 x_3 单位.

原问题可以描述为：求三种产品的产量 x_1、x_2、x_3，在满足生产用料不超过库存原料数的约束下，使各种产品的利润总额最大.

表 2-2

产品 / 单位产品用料 / 原料	B_1	B_2	B_3	库存原料数（公斤）
A_1	3	2	5	1200
A_2	2	0	3	840
单位产品利润（元）	14	15	20	

用料约束的数学表达式

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 1200 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 840 \end{cases}$$

三种产品利润总额的数学表达式

$$s = 14x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

综上，上述问题可抽象为求一组变量 x_1、x_2、x_3，满足约束条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 1200 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 840 \end{cases}$$

且使目标函数 $s = 14x_1 + 15x_2 + 20x_3$ 取最大值.

简记为

$$\max s = 14x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 1200 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 840 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，x_1，x_2，$x_3 \geqslant 0$ 理解为产品产量不能为负值，称为非负条件.

例 2 （合理下料问题）设有一批数量足够多的圆钢材.每根钢材长 4m，现需截出长为 698mm 的 4000 根，长 518mm 的 3600 根，截料时一般要余下料头（残料）. 问如何截料用的圆钢材最省？

解 关于线材下料，截取的方式可能有很多种. 表 2-3 给出了全部可能的截取方式.

表 2-3

具体截法 \ 方式 / 规格	I	II	III	IV	V	VI	需要量
698mm	5	4	3	2	1	0	4000
518mm	0	2	3	5	6	7	3600
残料长（mm）	510	172	352	14	194	374	

具体含义是：比如方式 II 是将 4m 长圆钢，先截出 4 根 698mm 长的，余料中再截出 2 根 518mm 的，甩下的料长 172mm.

事实上，4000−698×4−518×2=172（mm）

可以验证，只有这六种截料方式.

设第 j 种下料方式所用的圆钢数为 x_j 根，两种规格截材需要量约束的数学表达式可写成

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 4000$$
$$2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 = 3600$$

残料总和的数学表达式为

$$510x_1 + 172x_2 + 352x_3 + 14x_4 + 194x_5 + 374x_6$$

用料总和的数学表达式为

$$s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

问题可抽象为求一组变量 $x_j (j = 1, 2, \cdots, 6)$，使满足约束条件

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 4000$$
$$2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 = 3600$$

且使目标函数 $s = 510x_1 + 172x_2 + 352x_3 + 14x_4 + 194x_5 + 374x_6$ 取最小值.（或 $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ 取最小值）

简记为

$$\min s = 510x_1 + 172x_2 + 352x_3 + 14x_4 + 194x_5 + 374x_6$$

$$s.t.\begin{cases}5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+x_5=4000\\2x_2+3x_3+5x_4+6x_5+7x_6=3600\\x_1,\ x_2\geqslant 0(\text{整数})\end{cases}$$

（二）线性规划数学模型的一般形式

综观以上两个例题的数学模型，其共同特点是：目标函数都是线性函数，要么是极大化的，要么是极小化的；约束条件都是线性函数的等式或不等式，变量都满足非负条件. 这正是线性规划的重要含义之一.

据此，我们总结出线性规划数学模型的一般形式.

求一组变量 $x_j\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的值，使满足

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\quad(\text{或}\geqslant b_i,\ \text{或}=b_i)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\quad x_j\geqslant 0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

且使目标函数 $s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 的值最大（或最小）.其中，系数 a_{ij}、b_i、c_j 为已知的常系数.

可见，建立线性规划数学模型的关键是：引进适当的决策变量，写出约束条件，建立目标函数.

例 3 （运输问题）欲将某物资从 m 个产地 $A_1,\ \cdots,\ A_m$ 调运往几个销售地 $B_1,\ \cdots B_n$.各地的产量、销量、物资由产地运往销地的运价等资料如表 2-4 所示.

表 2-4

销地 / 运价（元/吨） / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（吨）
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_{mn}
销量（吨）	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

当 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ 时，为平衡运输问题；当 $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$ 时，为供过于求的不平衡运输问题；当 $\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j$ 时，为供不应求的不平衡运输问题. 问题：如何制定调运方案可使总运费最省？

解 这里需引入双下标变量，但其本质上与单下标变量 x_j 没有区别，仅是表现形式的不同.

设 A_i 运往 B_j 的物资数量为 x_{ij} 吨（$i=1,\ \cdots,\ m;\ \ j=1,\ \cdots,\ n$）.

1．平衡运输问题

调运方案可表示为如表 2-5 所示.

表 2-5

销地 调运量 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_{mn}
销量	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

需满足的约束条件是：产地调出的物资量等于其产量，销地调入的物资量等于其销售量，即发尽收足.

据此，平衡运输问题的数学模型为

求一组变量 x_{ij} （$i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n$）的值，使之满足

$$s.t.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n) \end{cases}$$

并使目标函数

$s=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots+c_{2n}x_{2n}+\cdots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\cdots+c_{mn}x_{mn}$ 的值最小.

或简写作

$$\min s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1, \cdots, m) \\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_j\ (j=1, \cdots, n) \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n) \end{cases}$$

2．供过于求时，其数学模型为

$$\min s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i \ (i=1,\ \cdots,\ m)\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_j \ (j=1,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\geqslant 0 \ (i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

3．供不应求时，其数学模型为

$$\min s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \ (i=1,\ \cdots,\ m)\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant b_j \ (j=1,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\geqslant 0 \ (i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

（三）线性规划数学模型的标准形式

为便于讨论和研究算法，引进线性规划模型的标准型

$$\min\ s=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_j>0\ (j=1,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{C}=(c_1,\ c_2,\ \cdots c_n)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

标准型的矩阵形式为

$$\min\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX}$$

$$s.t.\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

这里，假设 $R(\boldsymbol{A})=m$，若记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots\boldsymbol{P}_n)$

$$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{mj})^{\mathrm{T}}\qquad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

线性规划的标准型又可写为

$$\min \quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

（四）线性规划模型的标准化

主要是解决两个问题：一是将极大化的目标函数化为等价的极小化目标函数；二是将不等式的约束化为等式约束. 有时，也需将无非负约束的变量表示为有非负约束的变量.

1. $\max s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$，只需令 $s'=-s$，则 $\min s'=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ 与 $\max s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 作用等同.

2. $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\leqslant b_k$，引入松弛变量 $x_{n+k}\geqslant 0$，可得到等式约束 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}+x_{n+k}=b_k$；对 $\sum_{j=1}^{n}a_{lj}x_j\geqslant b_l$，引入剩余变量 $x_{n+l}\geqslant 0$，可得到等式约束 $\sum_{j=1}^{n}a_{lj}-x_{n+l}=b_l$.

例 4 将下列线性规划模型标准化

$$\max \quad s=3x_1-x_2$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1-x_2\geqslant -3\\ x_1+2x_2\leqslant 6\\ x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 其标准形式可化为

$$\min \quad s'=-3x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=3\\ x_1+2x_2+x_4=6\\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4)\end{cases}$$

或

$$\min \quad s'=-3x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+2x_2+x_4=6\\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4)\end{cases}$$

二、单纯形法

20 世纪 40 年代美国的丹捷格（G·B·Dantzig）提出了求解线性规划的一种方法——单纯形法. 单纯形法的基本思路是：从一个可行基出发，在保证可行性前提下，经过换基迭代，使目标函数值下降，经过有限次的换基迭代，使目标函数取最小值，求得问题的最优解，或判断出无解. 另外，将整个换基迭代过程用于若干张表格的变换表现出来.

（一）对应于基 *B* 的单纯形表和判优定理给定 *Lp*

$$\min \quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX} \tag{2.10}$$

$$s.t\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b} & (2.11)\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0 & (2.12)\end{cases}$$

设 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，不妨约定 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots\boldsymbol{P}_m)$ 为一个基. 记 $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{P}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{P}_n)$，则

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N})$. 相应地，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{bmatrix}$.其中，$\boldsymbol{X}_B=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_N=(x_{m+1},\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$.称 $\boldsymbol{X}_B$ 为对应于基的基 $\boldsymbol{B}$ 变量部分，$\boldsymbol{X}_N$ 为非基变量部分.

约束方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 可写成

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{bmatrix}=\boldsymbol{b} \quad 即\ \boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b} \tag{2.13}$$

因 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在. 以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘式（2.13）两边，

得到 $\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ （2.14）

即 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N$ （2.15）

式（2.15）将基变量用非基变量表示出来了.

由 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N})$，相应地，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_B,\ \boldsymbol{C}_N)$. 其中，$\boldsymbol{C}_B=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$，$\boldsymbol{C}_N=(c_{m+1},\ \cdots,\ c_n)$.

目标函数　$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX}$ 可写成

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{C}_B.\boldsymbol{C}_N)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{bmatrix}，即\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N \tag{2.16}$$

将式（2.15）代入式（2.16），得到

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_B(\boldsymbol{B}_{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}_{-1}\boldsymbol{NX}_N)+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N \quad 即\ \boldsymbol{S}'=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N \tag{2.17}$$

由（2.15）、（2.17）两式，取 $\boldsymbol{X}_N=0$ 时，$\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ （2.18）

$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ 0\end{pmatrix}$ 为线性规划对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基础解. 相应的目标值为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

倘若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 为基础可行解，$\boldsymbol{B}$ 也为一可行基.

判优定理　对于基 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$，且 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\leqslant 0$ 时，则对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基础可行解是最优基础可行解，最优值为 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$.基础可行解 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ 0\end{pmatrix}$ 为最优基础可行解. 称 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$ 为判别解是否最优的检验数.

由判优定理的证明，可以得出

$$(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}=(0,\ \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{C}_N)\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}$$

即 $(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0X}_B+(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{C}_N)\boldsymbol{X}_N$ （2.19）

综合式（2.13）、（2.14）、（2.17）、（2.19）的结果，原线性规划的目标函数和约束方程有如下形式上的变化.

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX}\\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0X}_B-(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{C}_N)\boldsymbol{X}_N\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \end{cases} \tag{2.20}$$

但式（2.20）中的四组系数量值却标示出了线性规划取定可行基 $\boldsymbol{B}$ 时的重要量值：$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为基变量值，$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-0$ 为判断基础可行解是否为最优解的检验数，$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为目标值，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 为约束方程的系数矩阵.

不妨将式（2.20）整理成如下的形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{X}_B \quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \end{cases} \tag{2.21}$$

其隐含目标函数表达式和约束方程组，同时，标示了基变量的取值.

另外，由线性代数理论可知，换另一个基 $\boldsymbol{B}$ 时，相当于对如下矩阵表

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

施行行初等变换.

综上，矩阵表式（2.22）在求解线性规划时十分重要，其隐含了目标函数和约束方程. 称其为对应于基的单纯形表. 记作 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \end{array}\right)$. 这里，$\boldsymbol{B}$ 已可以是任何一个基.

实际运算时，需将矩阵形式的单纯形表设计成一张数据表格形式.

由于 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 $m\times 1$ 矩阵，故 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为 $m\times 1$ 矩阵；又 $\boldsymbol{C}_B$ 为 $1\times m$ 矩阵，得出 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为 1×1 矩阵.

由此，有如表 2-6 所示的单纯形表格式.

表 2-6

		x_1	x_2	$\cdots$	x_n
s	b_{00}	b_{01}	b_{02}	$\cdots$	b_{0n}
x_{j1}	b_{10}	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1n}
x_{j2}	b_{20}	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{jm}	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	$\cdots$	b_{mn}

其隐含目标函数和约束方程组

$$s=b_{00}-b_{01}x_1-b_{02}x_2-\cdots-b_{0n}x_n$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=b_{10} \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=b_{20} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{mn}x_n=b_{m0} \end{cases}$$

还给出了基变量的值：$x_{j1}=b_{10}$，$x_{j2}=b_{20}$，$\cdots$，$x_{jm}=b_{m0}$，非基变量均为零.

表中数据量含义如下.

b_{00}：对应于基 B 的基础可行解的目标值.

b_{0j}：对应于变量 x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的检验数. 由式（2.18），基变量的检验数一定为零.

b_{i0}：基变量 x_{ji}（$i=1, 2, \cdots, m$）的值.

b_{ij}：第 i 个约束方程中变量 x_j（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）的系数. 由式（2.14），$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 内基变量对应的列中，只有与 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 中同一基变量值对应的行交叉处系数为 1，其余元素均为 0.

例 5 给定线性规划如下，建立其全部基对应的单纯形表，并讨论其对应的解.

$$\min s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)$, $\boldsymbol{C}=(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

共有三个基：$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$, $\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3)$, $\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)$

（1）$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 时，可求出 $\boldsymbol{B}^{-1}{}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{B}^{-1}{}_1\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1}{}_1\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{B}_{1-1}\boldsymbol{b}=(1, 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}{}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1}{}_1\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}=(1,2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}-(1, 2, 3)=(1, 2, 5)-(1, 2, 3)=(0, 0, 2)$$

故 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_1)=\left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$，即如表 2-7 所示.

表 2-7

		x_1	x_2	x_3
S	3	0	0	2
x_1	1	1	0	1
x_2	1	0	1	2

由此表可知 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{s}_1=3$，非最优解.

（2）$\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3)$ 时，$\boldsymbol{B}^{-1}{}_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

利用 $\boldsymbol{C}_{B_2}=(2, 3)$，类似地，可算出相应的值，可构造出如表 2-8 所示的单纯形表.

表 2-8

		x_1	x_2	x_3
S	2	0	−1	0
x_1	1/2	1	−1/2	0
x_2	1/2	0	1/2	1

可见，$\boldsymbol{X}^{(2)}=(1/2，0，1/2)^{\mathrm{T}}$ 为最优解，$s_2^*=2$

（3）$\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{P}_2，\boldsymbol{P}_3)$ 时，$\boldsymbol{B}_3^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

利用 $\boldsymbol{C}_{B_3}=(\boldsymbol{C}_2，\boldsymbol{C}_3)=(2，3)$，构造出如表 2-9 所示的单纯形表.

表 2-9

		x_1	x_2	x_3
S	1	−2	0	0
x_1	−1	−2	1	0
x_2	1	1	0	1

可见，$\boldsymbol{B}_3$ 不是可行基，$\boldsymbol{X}^{(3)}=(0，-1，1)^{\mathrm{T}}$ 只是基础解，不是基础可行解.

（二）换基迭代

观察 $\begin{cases}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX}\\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AX}\end{cases}$

注意到以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘约束方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 两边只是相当于对方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的各个方程进行行初等变换，故 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的作用是等同的. 而目标函数表达式的改变也仅仅是形式的变化，没改变目标本身的含义.

单纯形法的对单纯形表所进行的一系列烦琐的换基迭代步骤，实质上就是对矩形表 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}_{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 进行一系列的行初等变换. 事实上，以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘矩形表$(\boldsymbol{b}，\boldsymbol{A})$就是对其做行变换，而 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 又可分解为一系列行初等变换之积，当然，再以其左乘$(\boldsymbol{b}，\boldsymbol{A})$，就是完成一系列行初等变换了.

换基就是从线性规划 $s.t.\begin{cases}\min\boldsymbol{S}=\boldsymbol{CX}\\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$ 中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中更换一个又一个可行基，直至调换至最优基 $\boldsymbol{B}^*$ 为止. 迭代，就是对矩阵$(\boldsymbol{b}，\boldsymbol{A})$进行一系列的行初等变换，直至最优基 $\boldsymbol{B}^*$ 对应的矩形表. 从而，求出线性规划数学模型的最优解 $\boldsymbol{X}^*$ 和最优值 $\boldsymbol{S}^*$.

从上面介绍的内容可以看到，单纯形方法，就是利用线性代数中矩阵及其代数运算方法作为工具，将矩阵通常使用的表格化进行了处理而已.

（三）寻求实际问题的最优解决方案

利用单纯形方法找到实际问题的数学模型的最优解后，我们只需舍弃松弛变量和剩余变量，并分析其内在含义，就可以按决策变量的取值，给出实际问题的最优解决方案. 而目标函数的最优值，则对应出实际问题的最优决策结果. 从而，使一个实际决策问题得到了完美地解决.

第六节　多元线性回归分析预测法的应用

回归分析预测法属于因果分析预测法. 这种方法是一种建立在数理统计理论基础上的统计预测方法，是在具有统计相关关系的两个或两个以上的变量之间找出回归方程，建立起数学模型，进行统计分析，应用回归方程进行预测的方法.

应当指出，影响随机变量 $\boldsymbol{Y}$ 的自变量可以有多个. 这时一元回归分析法就无能为力，要采用多元回归分析预测法. 其预测的原理、方法和程序与一元回归分析预测法基本相同. 只是在选定自变量、求回归方程参数和统计检验等方面要比一元回归预测复杂得多.

设随机变量 y 与 m 个变量 x_1、x_1、…、x_m 线性相关. 回归方程记为

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_m x_m$$

样本观测值为（x_{11}，x_{12}，…，x_{1m}，y_1），（x_{21}，x_{22}，…，x_{2m}，y_2），…，（x_{n1}，x_{n2}，…，x_{nm}，y_n），x_{ki} 代表 x_j 的第 k 次观测值.

可　有 $\overline{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ 即 $\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{XB} + \boldsymbol{e}$ ，其中，$\overline{\boldsymbol{Y}} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B} = (b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e} = (e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n)^{\mathrm{T}}$ 为预测误差矢量.

利用最小二乘原理，使 $\boldsymbol{e}$ 最小，$\boldsymbol{B}$ 可按以下步骤求出：$\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{XB}$ 有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XB}$，可以证明，$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}$ 存在，以其左乘前式 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XB} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Y}}$，得到 $\hat{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Y}}$，由此，得到多元线性回归方程 $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_m x_m$ 的系数值 b_0，b_1，…，b_m.

以上作为预测方程，将给定的因素变量 x_1，x_2，…，x_m 的值代入预测方程，就可以给出预测值.

经过必要的统计检验（显著性检验），可以对预测结果进行误差估计，给出预测结果的置信度和置信区间.

上述回归分析预测法的流程图如图 2-1 所示.

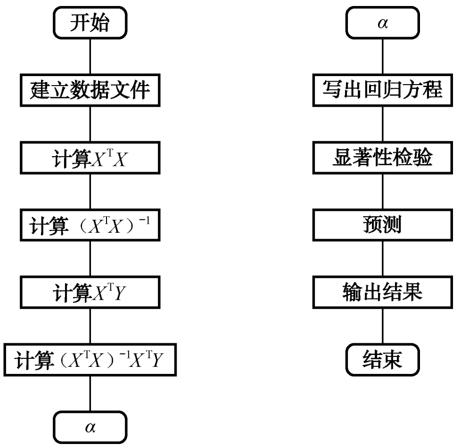


图 2-1　回归分析预测法流程图

从上面的讨论可以看出，矩阵及其代数运算方法是多远线性回归分析预测法的关键，其方法的应用已十分清楚.

例 某服装公司发现本公司服装销售额 y（万元）与该城市人均衣着用品的支出额 x_1（元）及该城市人口 x_2（万人）关系密切. 测算了 14 年的有关数据如表 2-10 所示.

试建立该公司服装销售额 y 的二元线性回归方程. 现知道第 15 年份 x_1 为 110 元，x_2 为 96 万人，请预测该年份服装销售额，并给出显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的置信区间.

表 2-10

人均衣着用品支出额 x_1（元）	49	45	51	52	59	62	69	72	78	80	90	92	98	103
城市人口 x_2	49	58	62	71	62	74	71	74	79	84	85	94	91	95
服装销售额 y	28	39	41	44	43	50	51	57	63	66	70	76	80	84

运用回归分析方法后，其预测方程为 $\hat{y} = -16.11 + 0.522x_1 + 0.547x_2$，预测结果如下.

记第 15 年份人均衣着用品额为 x_{10}，城市总人口为 x_{20}，服装销售额为 $\hat{y}_0$.

由 $y_0 = \hat{a} + \hat{b}_1 x_{10} + \hat{b}_2 x_{20}$，有 $\hat{y}_0 = 87$（万元）.

利用计算置信区间公式 $(y_0 - 1.96S，y_0 + 1.96S)$，置信度为 95%的预测值区间为 $(87 - 1.96 \times 1.75，87 + 1.96 \times 1.75) = (83.5，90.5)$.

第二章自测题

一、选择题

1．$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times k$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $k \times t$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素全为零，则下列结论正确的是（　　）.

A．$\boldsymbol{AB}$ 的第 j 行元素全等于零　　B．$\boldsymbol{AB}$ 的第 j 列元素全等于零

C．$\boldsymbol{BA}$ 的第 j 行元素全等于零　　D．$\boldsymbol{BA}$ 的第 j 列元素全等于零

2．设矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m \times n}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CB}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是（　　）阶矩阵.

A．$n \times m$　　$m \times n$　　B．$m \times n$　　$n \times m$

C．$n \times n$　　$m \times m$　　D．$m \times m$　　$n \times n$

3．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶方阵，下列各式中，（　　）式未必成立.

A．$\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{ACB}$　　B．$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

C．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{AB}$　　D．$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

4．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}，\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$，则（　　）.

A．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$　　B．$|\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{0}$

C．$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$　　D．$(\boldsymbol{AB})^2 = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$

5．设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{s \times n}$，$s \neq n$，又 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$，则（　　）.

A．$\boldsymbol{A}^2$ 有意义　　B．$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 都有意义且都是矩阵

C．$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有意义　　D．对任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{0}$

6．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵，下列矩阵不一定是对称矩阵的是（　　）.

A．$A+A^{\mathrm{T}}$　　B．AA^{T}

C．$A-A^{\mathrm{T}}$　　D．$\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$

7．设 A 是 4 阶方阵，$|A|=c\neq 0$，则 $|A^*|$ 等于（　　）．

A．c　　B．c^2　　C．c^3　　D．c^4

8．设 A、B 为同阶矩阵，则 AB 可逆的充要条件是（　　）．

A．$A\neq 0,\ B\neq 0$　　B．$AB\neq 0$

C．$|A|\neq 0,\ |B|\neq 0$　　D．$|A|\neq 0$

9．下列结论正确的是（　　）．

A．上三角矩阵的逆矩阵是上三角矩阵

B．对称矩阵的逆矩阵是反对称矩阵

C．若 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $A+I_n$ 也是 n 阶可逆矩阵

D．若 $AB=I_n$，则 A 必是可逆矩阵

10．已知 n 阶方阵 A 适合 $A^2+2A+I_n=0$，则必有（　　）．

A．$|A|=0$　　B．$A+I_n=0$　　C．A 可逆　　D．$|A|=-1$

11．若矩阵 A 的行列式等于零，则（　　）．

A．A^2 是非异矩阵　　B．A 有逆矩阵

C．A 是零矩阵　　D．对任意与 A 同阶的矩阵 B，$|AB|=0$

12．A，B，C 均是 n 阶方阵，则（　　）．

A．若 A 是非异矩阵，从 $AB=AC$ 可以推出 $BA=CA$

B．若 A 是非异矩阵，必有 $AB=BA$

C．若 $A\neq 0$，从 $AB=AC$ 可以推出 $B=C$

D．若 $B\neq C$，必有 $AB\neq AC$

13．下列矩阵可以化为有限个初等矩阵积的是（　　）．

A．$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

C．$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$

14．下列关于同阶奇异矩阵及非异矩阵的命题正确的是（　　）．

A．两个奇异矩阵之和仍是奇异矩阵

B．两个非奇异矩阵之和仍是非奇异矩阵

C．两个奇异矩阵之积必是奇异矩阵

D．一个非奇异矩阵与一个奇异矩阵之积必是非异矩阵

15．两个 n 阶初等矩阵的积必为（　　）．

A．初等矩阵　　B．单位矩阵　　C．可逆矩阵　　D．奇异矩阵

16．初等矩阵（　　）．

A．都可逆　　B．相加仍是初等矩阵

C．行列式值都等于 1　　　　　　　　　D．相乘仍是初等矩阵

17．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换后得到 $\boldsymbol{B}$，下列结论正确的是（　　）．

A．若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

B．若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|\boldsymbol{B}|$ 同时为零或同时不为零

C．若 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵，则 $\boldsymbol{B}$ 未必是奇异矩阵

D．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

二、解答题

1．已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3. \end{cases}$$

求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换.

2．利用初等变换求解下列问题

（1）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}，求 R(\boldsymbol{A})；$$

（2）解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$；

（3）试确定参数 λ，使矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩最小.

3．（1）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为整数，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素均为整数的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$；

（2）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}(a_i \neq 0，i=1，2，\cdots，n)，求 \boldsymbol{A}^{-1}.$$

4．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同阶矩阵，且 $\boldsymbol{C}$ 非奇异，满足 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$，求证：$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^m$（$m$ 为正整数）.

5．已知 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$，试证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，且求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

6．设矩阵

$$\boldsymbol{A}=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]，\boldsymbol{B}=[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]，$$

且 $a_i \neq 0，b_j \neq 0（i，j=1，2，\cdots，n）$，记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；（2）求 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$.

第三章 线性方程组

工程技术、经济领域以及科学研究中的许多问题，往往可以归结为求解线性方程组的问题，因而讨论线性方程组的理论及其求解方法，无论在理论上还是在应用上都是很有意义的. 本章将重点介绍线性方程组解的存在性、解的个数和求解方法；向量间的线性关系及性质；线性方程组解的性质和解的结构等内容.

第一节 高斯消元法

n 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

当 $b_i(i=1，2，\cdots，m)$ 全为 0 时，称方程组（3.1）为齐次线性方程组，否则称之为非齐次线性方程组.

方程组（3.1）的矩阵形式表达式为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}，\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}，\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}，$$

$\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组（3.1）的系数矩阵，而

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

称为方程组（3.1）的增广矩阵.

显然，增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 与线性方程组是一一对应的，那么，增广矩阵唯一确定一个线性方程组.

在中学代数里，我们学过用消元法解二元、三元线性方程组. 例如，解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

由第二个方程减去第一个方程的 2 倍，第三个方程减去第一个方程，就变成

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

第二个方程减去第三个方程的 4 倍，然后再把所得第二、第三两个方程的次序互换，即得如下阶梯形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 \end{cases}$$

由此易求得方程组的解为 $x_1 = 9$，$x_2 = -1$，$x_3 = -6$. 在上述消元过程中，不难看出，无非是对方程组反复进行以下三种变换（称之为方程组的初等变换）：

（1）交换两个方程的位置，如交换第 i，j 两方程；

（2）某方程两边同乘以一个非零常数 k；

（3）某方程两边同乘以一个非零常数 k 后加到另一个方程上去.

最后将它化为与之同解的阶梯形方程组，从而达到求解的目的.

对于一般的线性方程组（3.1），亦可利用消元法求解. 因为增广矩阵可以完全确定一个线性方程组，而线性方程组的初等变换恰好对应于矩阵的初等行变换. 因此可用消元法求解线性方程组，对它的增广矩阵实施初等行变换，将其化成行阶梯形矩阵，从而得到以行阶梯形矩阵为增广矩阵的阶梯形方程组，该方程组与原方程组是同解的. 同时，还可直接由行阶梯形矩阵来判断方程组是否有解，具体方法如下.

对于线性方程组（3.1），我们总可以对其增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等变换，将其化成如下的行阶梯形矩阵（必要时，可对 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的前 n 列适当调换次序），即

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \sim \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_1,$$

其中 $c_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$， $\boldsymbol{A}_1$ 所对应的方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \cdots \\ \qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad 0 = 0 \\ \qquad \cdots \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

它与方程组（3.1）是同解的.

方程组（3.2）中“$0=0$”是一些恒等式（它们可能出现，也可能不出现），实质上它们所代表的是方程组（3.1）中“多余的方程”，去掉它们并不影响方程组的解. 可见，当 $d_{r+1} \neq 0$ 时，方程组（3.2）无解；当 $d_{r+1} = 0$ 时，分两种情况.

（1）$r = n$，这时方程组（3.2）即为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \cdots \\ \qquad c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $c_{ii} \neq 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 显然，方程组（3.3）的系数矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ii})_{n\times n}$ 的秩 $R(\boldsymbol{C}) = n$，此时容易推出 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{C}) = n$. 由最后一个方程开始，可以逐个唯一决定 x_n，x_{n-1}，$\cdots$，x_1 的值. 这时方程组（3.1）有唯一解.

（2）$r < n$，这时方程组（3.2）即为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{21}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad \cdots \\ \qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

其中 $c_{ii} \neq 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$，当 $r < n$ 时，必有 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{C}) = r < n$. 任给 x_{r+1}，x_{r+2}，$\cdots$，x_n 的一组值，就可以唯一确定 x_1，x_2，$\cdots$，x_{r+1}，$\cdots$，x_n. 由于 x_{r+1}，x_{r+2}，$\cdots$，x_n 可以任意取值，所以方程组（3.1）有无穷多组解.

综上所述，方程组（3.1）有解的充分必要条件是 $d_{r+1} = 0$. 此时，若 $r = n$，即 $R(\boldsymbol{A}) = n$，则方程组（3.1）有唯一解；若 $r < n$，即 $R(\boldsymbol{A}) = r < n$，则方程组（3.1）有无穷多组解.

已经知道，一个矩阵经初等行变换后其秩不变，并且行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的行数. 由此容易得出下述重要定理.

定理 3.1 （1）方程组（3.1）有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\tilde{\boldsymbol{A}})$；

（2）当 $R(\boldsymbol{A}) = R(\tilde{\boldsymbol{A}}) = r$ 时，若 $r = n$，则方程组（3.1）有唯一解，若 $r < n$，则方程组（3.1）有无穷多组解.

例 1 判断线性方程组是否有解

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解 对增广矩阵施行初等行变换

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\;\vdots\;\boldsymbol{B})=\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{array}\right],$$

因为$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\tilde{\boldsymbol{A}})$，所以方程组无解.

例 2 当λ为何值时，下面线性方程组有解？

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=1\\x_1+x_2-2x_3=\lambda\end{cases}$$

解 增广矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&-2\\1&-2&1&1\\1&1&-2&\lambda\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\\1&1&-2&\lambda\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&1\\0&-3&3&0\\0&3&-3&\lambda-1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&\lambda-1\end{array}\right]$$

当$\lambda=1$时，有$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，方程组有解. 当$\lambda\neq1$时，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解.

对于n元齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{3.4}$$

因为恒有$R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})$，故它总有解. 零解总是其解.

显然，方程组（3.4）有非零解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=r<n$. 由此可推出，n个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式$|\boldsymbol{A}|=0$. 因为这时，$R(\boldsymbol{A})=r<n$，当且仅当$|\boldsymbol{A}|=0$.

至此，我们已解决了线性方程组有解及齐次线性方程组有非零解的判别条件问题，而且这些都可以用消元法求解. 但在有无穷多解时，解与解之间的关系如何，如何求出其全部解，还不得而知. 这就有必要引进n维向量的有关知识，以便对线性方程组的问题做进一步的讨论.

习题 3.1

1．用消元法解以下线性方程组

（1）$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\x_1-2x_2+x_3-x_4=-1\\x_1-2x_2+x_3+x_4=5\end{cases}$；（2）$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=3\\3x_1+x_2-5x_3=0\\4x_1-x_2+x_3=3\\x_1+3x_2-13x_3=-6\end{cases}$.

2．判别下列线性方程组是否有解？若有解，指出解的组数.

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$;

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

第二节 向量组的线性相关性

n 维向量不仅用来研究线性方程组，在力学、物理学及其他自然科学中也有广泛的应用. n 维向量可看作高等数学中向量 $\boldsymbol{a} = \{a_X, a_Y, a_Z\}$ 的推广，只不过 $n > 3$ 时，n 维向量就没有直观的几何意义了.

一、n 维向量及其运算

定义 3.1 由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组（$a_1, a_2, \cdots, a_n$）称为 n 维向量. 通常用 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 表示，例如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为向量的第 i 个分量（或坐标）. 分量是实（复）数的向量称为实（复）向量. 今后无特别声明，所指向量均为实向量.

一个 n 维向量可以写成一行的形式 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为行向量；也可以写成一列的形式 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列向量. 行向量与列向量是向量的两种不同的写法，意义是相同的.

分量都是零的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)$.

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 都是 n 维向量，当且仅当它们各个对应分量都相等，即 $a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记为 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

向量 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$，即 $-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$. n 维向量的加（减）法和数与向量的乘法有如下定义.

定义 3.2 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则称向量 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).$$

由负向量可定义向量的减法，向量$\boldsymbol{\alpha}$减去向量$\boldsymbol{\beta}$定义为向量$\boldsymbol{\alpha}$与负向量（$-\boldsymbol{\beta}$）之和，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots,\ a_n-b_n).$$

显然，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0.$

定义 3.3 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$k$为实数，则向量$(ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n)$称为数$k$与向量的乘积，记为$k\boldsymbol{\alpha}$，即$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n)$.

对以上定义的向量加法及数与向量的乘法运算，不难证明，它们满足以下运算规律（设$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$都是n维向量，k，l是实数）.

1．$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

2．$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

3．$\boldsymbol{\alpha}+0=\boldsymbol{\alpha}$；

4．$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0$；

5．$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

6．$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

7．$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

8．$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

在数学中，把具有上述八条规律的运算称为线性运算.

例 1 设$\boldsymbol{\alpha}=(-3,\ 3,\ 6,\ 0)$，$\boldsymbol{\beta}=(9,\ -6,\ -3,\ 18)$，且$\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$.

解 由$\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$，得$\boldsymbol{\gamma}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})$，即

$$\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{3}[(9,\ -6,\ -3,\ 18)-(-3,\ 3,\ 6,\ 0)]=(4,\ -3,\ -3,\ 6).$$

二、向量组的线性相关与线性无关

定义 3.4 设有n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组数$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$，使得$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则称向量$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合，或称向量$\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

例如，向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,\ 1,\ -1)$，因为$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，所以$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.

又如，任一n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$都可以由$n$维向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$线性表示，事实上$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，其中$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n$称为$n$维单位向量组.

显然，n维零向量可以由任意的n维向量组线性表示.

定义 3.5 设n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组不全为零的数$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$（即$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$中至少有一个不为零），使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0 \tag{3.5}$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，否则称它线性无关.

所谓讨论向量组的线性相关性，就是研究向量组是线性相关还是线性无关. 单个向量$\boldsymbol{\alpha}$线性相关当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=0$，两个向量线性相关当且仅当它们的对应分量成比例（简称这两个向量成比例）.

例如向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,\ 1,\ -1)$，由于存在不全为零的“2，

1，−1”使 $2\boldsymbol{\alpha}_1+1\boldsymbol{\alpha}_2+(-1)\boldsymbol{\alpha}_3=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

n 维向量组不是线性相关，就是线性无关. 所谓向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，就是仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时（3.5）式才能成立，或者说若向组量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关而（3.5）式成立，则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

例如，n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性无关的，事实上，若令 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=0$，即 k_1，k_2，…，$k_n=(0，0，\cdots，0)$，则 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

定理 3.2 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证 充分性.设向量组中有一个向量（譬如 $\boldsymbol{\alpha}_m$）能由其余向量线性表示，即有 $\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$. 于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_m=0$，因 k_1，k_2，…，k_{m-1}，(-1) 中至少有一个(-1)不等于零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

必要性. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，即有一组不全为 0 的数 l_1，l_2，…，l_m，使得 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$，因 l_1，l_2，…，l_m 中至少有一个不为零，不妨设 $l_1\neq 0$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\dfrac{l_2}{l_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\left(-\dfrac{l_3}{l_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\left(-\dfrac{l_m}{l_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_m$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由其余向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

讨论向量组的线性相关性，对于研究方程组中是否有多余的方程很有意义. 例如，齐次线性方程组（3.4），如果把第 i 个方程的系数组成一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}，a_{i2}，\cdots，a_{in})(i=1，2，\cdots，m)$，这样，由方程组（3.4）可得到一个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，倘若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则知至少有一个向量（譬如 $\boldsymbol{\alpha}_m$）可由其余 $m-1$ 个向量线性表示，于是该方程组中至少是第 m 个方程为多余的. 由此可知，方程组（3.4）有多余方程的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

例 2 讨论方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_2+5x_3=0\\x_1+3x_2+6x_3=0\end{cases}$ 是否有多余方程？

解 由各方程的系数组成向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1，1，1)，\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0，2，5)，\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1，3，6).$$

很明显，存在 $k_1=1$，$k_2=1$，$k_3=-1$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0$，表明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，该方程组去掉任意一个方程后所得的方程组与原方程组同解.

例 3 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1，-1，1，-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2(1，-1，2，1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2，3，1，2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1，0，5，1)$ 的线性相关性.

解 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$，

即 $(k_1+k_2-2k_3+k_4，-k_1-k_2+3k_3，k_1+2k_2+k_3+5k_4，-k_1+k_2+2k_3+k_4)=0$，

也即

$$\begin{cases}k_1+k_2-2k_3+k_4=0\\-k_1-k_2+3k_3=0\\k_1+2k_2+k_3+5k_4=0\\-k_1+k_2+2k_3+k_4=0\end{cases}$$

由于此方程组的行列式为

$$\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\-1&-1&3&0\\1&2&1&5\\-1&1&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\0&0&1&1\\0&1&3&4\\0&2&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&3&4\\2&0&2\end{vmatrix}=0,$$

故齐次方程组有非零解，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

例 4 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，试证向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$也线性无关.

证 令$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=0$，即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0$$

也就是

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0,$$

因$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$$

该方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

故方程组只有零解$k_1=k_2=k_3=0$，所以$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

定理 3.3 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，且表示式是唯一的.

证 因$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，故有不全为 0 的数k_1，k_2，…，k_m，k_{m+1}，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}=0$，若$k_{m+1}=0$，则$k_1$，$k_2$，…，$k_m$不全为 0，且有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0,$$

这与$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关矛盾，故$k_{m+1}\neq0$，因此，

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{k_2}{l_{m+1}}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{k_{m+1}}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k_{m+1}}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

再证唯一性．若$\boldsymbol{\beta}$可表示为$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$及$\boldsymbol{\beta}=l_1'\boldsymbol{\alpha}_1+l_2'\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m'\boldsymbol{\alpha}_m$，则$(l_1-l_1')\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(l_m-l_m')\boldsymbol{\alpha}_m=0$，因$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，故有$l_i=l_i'(i=1, 2, \cdots, m)$．这就证明了$\boldsymbol{\beta}$由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$表示的唯一性.

定理 3.4 若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$也线性相关.

证 因$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故有k_1，k_2，…，k_r不全为 0，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0$，

从而$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}=0$，因为$k_1$，$k_2$，…，$k_r$，0，0，…，0这$m$个数不全为 0，故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

推论 1 若向量组中含有零向量，则此向量组线性相关.

推论 2 线性无关向量组的任意部分向量组也必线性无关.

三、线性方程组、向量组、矩阵之间的联系

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.6}$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 分别称为方程组（3.6）的系数矩阵和增广矩阵.

若记

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

那么称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 记为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

若记

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

则方程组（3.6）可写为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{B}$$

或

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

方程组（3.6）相应的齐次线性方程组（3.4）可写为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

或

$$\boldsymbol{AX} = 0$$

建立了矩阵和向量组的关系后，可得到如下几个简单的结论.

（1）方程组（3.6）（即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{B}$ ）有解（不一定是唯一解）的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 可以由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

（2）齐次线性方程组（3.4）（即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$）有非零解的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

定理 3.5 设有两个向量组

$$\boldsymbol{A}：\ a_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{rj})^{\mathrm{T}},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m\ ;$$
$$\boldsymbol{B}：\ b_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{rj},\ a_{r+1,j})^{\mathrm{T}},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m\ .$$

即 b_j 是由 a_i 加上一个分量而得，若向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{B}$ 也线性无关.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)$，$\boldsymbol{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)$. 由于方程组 $\boldsymbol{BX}=0$（也即 $x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_mb_m=0$）的前 r 个方程就是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的 r 个方程，故方程组 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解一定是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解.

因为向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{AX}=0$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{BX}=0$ 也只有零解，因此向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性无关.

推论 r 维向量组的每个向量添上 $n-r$ 个分量，成为 n 维向量组. 若 r 维向量组线性无关，则 n 维向量组亦线性无关. 反言之，若 n 维向量组线性相关，则 r 维向量组亦线性相关.

定理 3.6 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量（n 个列向量）线性相关的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<m(R(\boldsymbol{A})<n)$.

证 若 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则至少有一个向量（譬如 $\boldsymbol{\alpha}_m$）可由其余 $m-1$ 个向量线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换（$r_m-k_1r_1-k_2r_2-\cdots-k_{m-1}r_{m-1}$）后，$\boldsymbol{A}$ 的第 m 行各元素都变为 0，故 $R(\boldsymbol{A})<m$.

反之，若 $R(\boldsymbol{A})=r<m$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换后变成等价阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r\\ \boldsymbol{0}_{m-r}\end{bmatrix},$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+1(r+1<m)$ 行内至少有一个行向量是其余 r 个行向量的线性组合，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

由于 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，故上述证明对列向量组成立，即 $R(\boldsymbol{A})<n$.

推论 1 当 $m\leqslant n$ 时，m 个 n 维向量线性无关的充分必要条件是它们所构成矩阵的秩等于 m.

推论 2 当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量一定线性相关.

事实上，设 m 个 n 维向量构成矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant n<m$，由定理 3.5 知，这 m 个 n 维向量线性相关.

由此可知，向量个数大于其维数的向量组必线性相关.

推论 3 n 个 n 维向量线性无关的充分必要条件是它们所构成矩阵的行列式不等于零.

推论 4 如果在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 r 阶子式 $\boldsymbol{D}_r\neq 0$，则含有 $\boldsymbol{D}_r$ 的 r 个行向量及 r 个列向量都线性无关；如果 $\boldsymbol{A}$ 中所有 r 阶子式都等于零，则 $\boldsymbol{A}$ 的任意 r 个行向量及任意 r 个列向量都线性相关.

例 5 判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -3,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 2,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,\ 1,\ 7)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,\ 4,\ 5)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 2,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ 1,\ -2,\ -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ -4,\ -3)$.

解 （1）因为向量组中所含向量的个数 4 大于向量的维数 3，所以该向量组线性相关.

（2）由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -4 & -3\end{bmatrix}\sim$

$$\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $R(\boldsymbol{A})=2<3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

习题 3.2

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4)$，求 $5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$，且 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

3. 将下列各题中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示为其他向量的线性组合.

（1）$\boldsymbol{\beta}=(3,4,-6)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-1)$；

（2）$\boldsymbol{\beta}=(2,-1,5,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)$.

4. 设有两个向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1r})$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mr})$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},\cdots,a_{1r},a_{1,r+1},\cdots,a_{1n})$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m=(a_{m1},\cdots,a_{mr},a_{m,r+1},\cdots,a_{mn})$. 证明：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

5. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，问 k_1,k_2,k_3 满足什么条件时，$\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关？

8. 判断下列各向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-2,2)$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,2)$；

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,-3)$；

（5）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-5,0,-1)$.

9. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，证明：表示法唯一的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，但其中任意三个向量都线性无关. 证明：必存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$.

第三节　向量组的秩

一、向量组的等阶

定义 3.6　设有两个 n 维向量组

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\text{：}\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r \\ &\boldsymbol{B}\text{：}\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_s \end{aligned} \tag{3.7}$$

如果向量组 $\boldsymbol{A}$ 中的每个向量都能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 中的向量线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示. 如果向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，且向量组 $\boldsymbol{B}$ 也能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价.

向量组之间的这种等价关系，反映到齐次线性方程组（一个向量对应一个方程）上来，表明向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 所对应的两个齐次线性方程组是同解的.

再者，如果向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，而向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{C}$ 线性表示，则向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{C}$ 线性表示. 特别地，向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由自身线性表示.

向量组之间的等价关系具有下述性质.

（1）反身性：向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{A}$ 自身等价；

（2）对称性：若向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价，则向量线 $\boldsymbol{B}$ 与向量组 $\boldsymbol{A}$ 等价；

（3）传递性：若向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价，向量组 $\boldsymbol{B}$ 与向量组 $\boldsymbol{C}$ 等价，则向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{C}$ 等价.

二、向量组的秩

定义 3.7　设有向量组 $\boldsymbol{T}$，如果

（1）在 $\boldsymbol{T}$ 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）$\boldsymbol{T}$ 中任意 $r+1$ 个向量（如果存在的话）都线性相关. 那么称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{T}$ 的一个最大线性无关组，简称最大无关组；数 r 称为向量组 $\boldsymbol{T}$ 的秩，记为 $R(\boldsymbol{T})$. 并规定，只有零向量的向量组的秩为零.

向量组的最大无关组可能不止一个. 例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -3,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,\ 1,\ 7)$，因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组的一个最大无关组. 同样可知 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是它的最大无关组.

例 1　全体 n 维向量构成的向量组记作 $\boldsymbol{R}^n$，求 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个最大线性无关组及 $\boldsymbol{R}^n$ 的秩.

解　因为任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的，所以任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\boldsymbol{R}^n$ 的最大无关组，故 $\boldsymbol{R}^n$ 的秩等于 n.

n 维单位向量组 $\boldsymbol{E}$：$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性无关的，因此向量组 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个最大无关组.

性质 1　向量组线性无关的充分必要条件是它所含向量个数等于它的秩.

性质 2　向量组与其最大无关组等价.

事实上，设 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{T}$ 的最大无关组. 因 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{T}$，显然，向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{T}$ 线性表示. 反之，任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{T}$，当 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{A}$ 时，因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\alpha}$ 这 $r+1$ 个向量线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 组线性表示；而当 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{A}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}$ 当然能由 $\boldsymbol{A}$ 组

线性表示，总之，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{T}$ ，$\boldsymbol{\alpha}$ 总能由 $\boldsymbol{A}$ 组线性表示，即向量组 $\boldsymbol{T}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示. 于是向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{T}$ 等价.

定理 3.7 若向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，则 $r \leqslant s$.

推论 1 等价的线性无关向量组所含向量个数相等.

推论 2 若向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，则向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩不超过向量组 $\boldsymbol{B}$ 的秩.

推论 3 等价的向量组有相同的秩.

推论 4 设在向量组 $\boldsymbol{T}$ 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ ，满足：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{T}$ ，$\boldsymbol{\alpha}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 就是向量组 $\boldsymbol{T}$ 的一个最大无关组，数 r 就是向量组 $\boldsymbol{T}$ 的秩. 即 $R(\boldsymbol{T}) = r$.

证 只要证明 $\boldsymbol{T}$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关即可. 在 $\boldsymbol{T}$ 中任取 $r+1$ 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_{r+1}$，由（2）知，该向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，从而 $R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r+1}) \leqslant r$ ，由性质 1 知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_{r+1}$ 线性相关，故 $\boldsymbol{T}$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关.

这个推论也是判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是否为向量组 $\boldsymbol{T}$ 的最大无关组的一个重要根据.

三、向量组的秩与矩阵的秩

定理 3.8 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组的秩.

证 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ ，以下证明 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

若 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = m$ ，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，由定理 3.5 的推论 1 知，$R(\boldsymbol{A}) = m$.

若 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = r < m$ ，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 为其最大无关组. 设 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r \end{bmatrix}$，由定理 3.5 的推论 1 知， $R(\boldsymbol{B}) = r$ ，从而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中有不等于零的 r 阶子式，而 $\boldsymbol{B}$ 包含在 $\boldsymbol{A}$ 中，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有不等于零的 r 阶子式.

下面证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 $r+1$ 阶子式全为零.

用反证法，假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 $r+1$ 阶子式不等于零，由定理 3.5 的推论 4 可知，以这个 $r+1$ 阶子式所在的行对应的 $r+1$ 个行向量线性无关. 这与 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = r$ 矛盾. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全为零，由矩阵秩的定义知 $R(\boldsymbol{A}) = r$.

同样可以证明，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

有了上述定理 3.8，我们求一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩与最大无关组，就可以将这些向量构成一个矩阵，用初等行变换将其化为行阶梯形矩阵，则其非零行的行数即为向量组的秩.

例 2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 1, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, 1, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1, 3, 2, 1)$ ，求此向量组的秩及其一个最大无关组.

解 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&1&-1\\0&1&1&-1\\-1&3&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{r_2+r_1}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&2&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix},$$

与 $\boldsymbol{A}$ 等价的阶梯形矩阵有三个非零行，故 $R(\boldsymbol{A})=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为最大无关组（此时应注意，若有调换行的初等行变换，求最大无关组时，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 的下标 i 应取初等变换前的行标）.

例 3　证明 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

证　设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，据定理 3.6 的推论 2 及定理 3.7 知，$R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A})$，此时，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组也可由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示，因此 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{B})$，从而 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

例 4　设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，但向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示，证明 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r\}=R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}\}$.

证　由题意知 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，则 $k_r\neq0$，反之，若 $k_r=0$，上式变成 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$，这与 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示的题设矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_r=\dfrac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta}-\dfrac{k_1}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_1-\dfrac{k_2}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\dfrac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$，因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}$ 等价，于是 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r\}=R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}\}$.

下面用向量组与矩阵的关系证明如下定理.

定理 3.9　线性方程组（3.6）有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

证　若（3.6）有解，列向量 $\boldsymbol{B}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示. 于是，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{b}$ 等价，从而有相同的秩，由此可知 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{A}})$. 反之，若 $R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})=r$，即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{b}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 有相同的秩，不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{b}$ 的一个最大无关组. 于是 $\boldsymbol{B}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{B}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，所以方程组（3.6）有解.

习题 3.3

1．设有三个同维数的向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$；$\boldsymbol{C}$：$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$. 向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，向量组 $\boldsymbol{B}$ 可由向量组 $\boldsymbol{C}$ 线性表示，其表达式分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3\\\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+4\boldsymbol{\beta}_3\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2-5\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\gamma}_1+3\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\gamma}_1+4\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_3\end{cases}$$

求向量组 $\boldsymbol{A}$ 由向量组 $\boldsymbol{C}$ 线性表示的表达式.

2．如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 线性相关，问 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是否为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个最大无关组？

3．求下列向量组的秩，并求一个最大无关组.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1，2，3，4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(9，11，20，5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2，4，6，8)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1，1，1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1，1，0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1，0，0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1，2，-3)$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1，-1，2，4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0，3，1，2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2，1，5，6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1，-1，2，0)$.

4．设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3，\cdots，\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\cdots，\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1，\boldsymbol{\beta}_2，\cdots，\boldsymbol{\beta}_s$ 有相同的秩.

5．证明秩为 $r(r>0)$ 的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\cdots，\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意 r 个线性无关的向量一定是这个向量组的一个最大无关组.

6．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，证明：$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{B})$.

第四节　线性方程组解的结构

设有 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{3.8}$$

其矩阵形式为 $\boldsymbol{AX}=0$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵，而

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

若 $x_1=k_1，x_2=k_2，\cdots，x_nk_n$ 为方程组（3.8）的解，则称

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

为（3.8）的解向量，它也是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解.

齐次线性方程组的解向量具有下列性质.

性质 3　若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}_2$，为（3.8）的解向量，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是（3.8）的解向量.

证　因为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A\xi}_1+\boldsymbol{A\xi}_2=0+0=0,$$

所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 是（3.8）的解向量.

性质 4　若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}$ 是（3.8）的解向量，k 为实数，则 $\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}$ 也是（3.8）的解向量.

证　因为 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi})=k\boldsymbol{A\xi}=k\boldsymbol{0}=0$，所以 $\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}$ 是（3.8）的解向量.

综合以上两个性质可知，齐次线性方程组（3.8）的解向量的线性组合仍是它的解向量. 所以，如果齐次线性方程组（3.8）有非零解，那么它一定有无穷多个解. 为了使这无穷多个解能由有限个解表示出来，我们希望能找到齐次线性方程组（3.8）的全体解向量构成的向量组的最大无关组，即齐次线性方程组（3.8）的基础解系.

定义 3.8 如果齐次线性方程组（3.8）的一组解向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$满足

（1）$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$线性无关；

（2）齐次线性方程组（3.8）的任意一个解向量都可以由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$线性表示，则称$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$是（3.8）的基础解系，它实际上就是（3.8）的所有解向量构成的向量组的最大无关组.

如果$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$为方程组（3.8）的基础解系，且齐次线性方程组（3.8）的所有解向量构成的集合用$\boldsymbol{S}\{\xi\}$表示，那么，

$$\boldsymbol{S}=\{\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r \mid k_1, k_2, \cdots, k_r \text{为任意实数}\},$$

这表示，$\boldsymbol{S}\{\xi\}$是一个r维向量空间，它称为方程组（3.8）的解空间，而方程组（3.8）的基础解系$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$就是解空间的一个基. 为了求出（3.8）的全部解，只需求出（3.8）的基础解系.

下面我们给出求基础解系的方法.

定理 3.10 对于齐次线性方程组（3.8），若$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则（3.8）必有基础解系，且基础解系中含有$n-r$个解向量.

证 因为$R(\boldsymbol{A})=r$，不妨设$\boldsymbol{A}$经初等行变换后化成如下阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中$c_{ii}\neq 0(i=1, 2, \cdots, r)$，与$\boldsymbol{A}_1$对应的方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \cdots \\ c_{rr}x_r=c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases} \tag{3.9}$$

显然（3.8）与（3.9）同解. 在（3.9）中$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$为自由未知量，任给$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$一组值，就唯一确定$x_1, x_2, \cdots, x_r$的值，从而得到（3.9）的一个解，亦即（3.8）的解. 令$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$取下列$n-r$组数

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

分别代入方程组（3.9），依次可得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} b_{1,n-r} \\ b_{2,n-r} \\ \vdots \\ b_{r,n-r} \end{bmatrix},$$

从而得到方程组（3.8）的 $n-r$ 个解向量

$$\xi_1=\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \xi_2=\begin{bmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \cdots,\ \xi_{n-r}=\begin{bmatrix}b_{1,n-r}\\b_{2,n-r}\\\vdots\\b_{r,n-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

容易看出 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 线性无关. 下面再证（3.8）的任一解

$$\xi=\begin{bmatrix}l_1\\\vdots\\l_r\\l_{r+1}\\\vdots\\l_n\end{bmatrix}$$

都可由 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 线性表示. 为此作向量 $\eta=l_{r+1}\xi_1+l_{r+2}\xi_2+\cdots+l_n\xi_{n-r}$，由于 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 是（3.8）的解，故 η 是（3.8）的解. 比较 η 与 ξ，知它们的后 $n-r$ 个分量对应相等，由于它们都满足（3.9），从而知它们的前 r 个分量亦必对应相等（方程组（3.9）表明任一解的前 r 个分量由后 $n-r$ 个分量唯一地确定），因此 $\xi=\eta$，即 $\xi=l_{r+1}\xi_1+l_{r+2}\xi_2+\cdots+l_n\xi_{n-r}$，这就证明了 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 是方程组（3.8）的一个基础解系.

齐次线性方程组（3.8）的基础解系是不唯一的，它的任何 $n-r$ 个线性无关的解向量均可构成它的一个基础解系，其中 r 为系数矩阵的秩，n 为未知量的个数.

综上所述，(1) 当 $R(\boldsymbol{A})=r=n$ 时，齐次线性方程组（3.8）只有零解，这时没有基础解系；(2) 当 $R(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，齐次线性方程组（3.8）有无穷多个解，其全部解（称为通解）可表示为 $\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，其中 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 是（3.8）的一个基础解系，k_1，k_2，…，k_{n-r} 为任意实数.

例 1 解方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=0\end{cases}$$

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有无穷多个解，且由行阶梯形矩阵得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1-x_3=x_2-x_4\\x_3=2x_4\end{cases}$$

取$\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，得$\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$$

为一个基础解系，故方程组的通解为$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1$，$k_2$为任意实数）.

下面讨论非齐次线性方程组的解的结构.

非齐次n元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{3.10}$$

其中常数项$b_i(i=1，2，\cdots，m)$不全为零. 其矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\tag{3.11}$$

其中$\boldsymbol{A}$为系数矩阵$\boldsymbol{X}=(x_1，x_2，\cdots，x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(b_1，b_2，\cdots，b_m)^{\mathrm{T}}$.

将（3.10）的常数项换成零，其他项不变，就得到相应的齐次线性方程组（3.8），于是称（3.8）为（3.10）的导出组，其矩阵形式为$\boldsymbol{AX}=0$. 同样，我们称（3.11）的解$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$为（3.10）的解向量，简称解.

方程组（3.10）与其导出组有着密切的联系，它们的解向量之间具有下列性质.

性质 5　若$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_2$是（3.11）的解向量，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是其导出组（3.8）的解向量.

证　由$\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{B}$知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}=0$，故$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是（3.8）的解向量.

性质 6　若$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}$是（3.11）的解向量，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}$是（3.8）的解向量，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$仍是（3.11）的解向量.

证　由$\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A\xi}=0$知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{B}+0=\boldsymbol{B}$，故$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$是（3.11）的解向量.

定理 3.11　设$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_0$是（3.10）的一个特解，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}$是其导出组（3.8）的通解，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0$是（3.10）的通解.

证　首先，由性质 4 可知$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0$是方程组（3.10）的解向量.

其次，（3.10）的任意一个解向量$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}$都可表示成$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_0$，其中$\boldsymbol{\xi}_0$是（3.8）的一个解向量. 这是因为$\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0)+\boldsymbol{\eta}_0$，令$\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0$，由性质 3 可知$\boldsymbol{\xi}_0$是（3.8）的一个解向量.

因为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}$是（3.8）的通解，所以（3.10）的任意一个解向量都包含在$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0$中，这就证明了$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0$是（3.10）的通解.

结合齐次线性方程组的通解结构，可以知道，若$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_0$是（3.10）的一个特解，向量组$\boldsymbol{\xi}_1，\boldsymbol{\xi}_2，\cdots，\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是其导出组（3.8）的一个基础解系，则（3.10）的通解可表示为$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_0$，其中$k_1，k_2，\cdots，k_{n-r}$为任意实数.

例 2　求解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$$

解　对增广矩阵施行初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B})=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2<4$，故方程组有无穷多个解，并且由行阶梯形矩阵得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=3x_3+x_4+1 \\ 4x_2=6x_3+7x_4-1 \end{cases}$$

$$令\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}，得\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}故\boldsymbol{\eta}_0=\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为原方程组的一个特解. 在对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=3x_3+x_4 \\ 4x_2=6x_3+7x_4 \end{cases}$$

中，取

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

得出

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为导出组的基础解系，从而原方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}_0$（$k_1$，$k_2$ 为任意实数）.

习题 3.4

1．求解下列非齐次线性方程组

（1）$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\3x_1-x_2+2x_3=10\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+4x_3=-5\\3x_1+8x_2-2x_3=13\\4x_1-x_2+9x_3=-6\end{cases}$

（3）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4\\x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$

2．设 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)2x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

3．已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=4\\x_1+x_2+x_3+2x_4+6x_5=11\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=14\end{cases}$$

有一个解 $\boldsymbol{\eta}^*=(1,1,1,1,1)'$，求它的通解.

4．已知 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}-1\\0\\3\\4\end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\x_1-2x_2+3x_3-2x_4=0\end{cases}$$

的一个解，试求方程组的一个包含 $\boldsymbol{\eta}$ 的基础解系.

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是某齐次线性方程组的一个基础解系，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是它的一个基础解系.

6．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，

（1）已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为它的两个解，求它的通解；

（2）设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},$$

求它的通解.

第五节 运用矩阵运算讨论线性方程组的解

设线性方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为 $n\times 1$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 $m\times 1$ 矩阵.

由线性代数理论，以及运用行初等变换求解法已经证明.

1．当 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 时，线性方程组无解；

2．当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 时，线性方程组有解.

对有解情形，利用矩阵运算讨论如下.

1．$m=n=R(\boldsymbol{A})$ 时，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在

由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 这一结果，事实上就是利用克莱姆法则求出线性方程组的唯一解.

2．$m<n$ 时，求出 $R(\boldsymbol{A})$.

（1）$R(\boldsymbol{A})=m<n$ 时，不失一般性，可令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N})$，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 的满秩矩阵，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在.

由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，有 $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}$.

以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘上式两边，得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N$. 上式中，取 $\boldsymbol{X}_N$ 为自由未知变量，可知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无数组解.

（2）当 $R(\boldsymbol{A})<m$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 中有多余的方程，共 $m-R(\boldsymbol{A})$ 个. 去掉这些多余的方程后，求解问题归结为前述（1）的情形.

（3）当 $m>n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 的行向量线性相关. 这时，可求出其一个极大性无关组，其对应的方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_1$ 与原方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 同解，且不再含多余的方程.

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_1$ 中，令 $\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{N}_1)$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{B_1}\\ \boldsymbol{X}_{N_1}\end{pmatrix}$.

① $R(\boldsymbol{A}_1)<n$ 时，有 $(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{N}_1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{B_1}\\ \boldsymbol{X}_{N_1}\end{pmatrix}=b_1$，$\boldsymbol{B}_1^{-1}$ 存在.

由 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}_{B_1}+\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{X}_{N_1}=\boldsymbol{b}_1$，有 $\boldsymbol{X}_{B_1}=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{X}_{N_1}$，为自由未知量. 此时，方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_1$ 有无数组解，原方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 也有无数组解.

② 当 $R(\boldsymbol{A}_1)=n$ 时，为用克莱姆法则求解情形，方程组有唯一解.

注：$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 时，不会出现 $R(\boldsymbol{A}_1)>n$ 的情形.

第六节 线性代数在电磁理论中的应用

电磁场理论中，宏观电磁场理论的电荷守恒定律、库仑定律、安培定律、法拉第定律、麦克斯韦方程组，以及静态电磁场、时变电磁场、电磁波的辐射、电磁波的传播等方面的研究，都离不开线性代数的矢量代数运算、矩阵运算、矢量的微分运算、积分运算等数学方法.

一、矢量微分运算

矢量的模和方向保持不变的矢量成为常矢量；反之，模或方向变化的矢量成为变矢量.对于定义区间$t\in[t_1, t_2]$中每一个t值，如果有唯一确定的矢量$\boldsymbol{F}(t)$与之对应，则称在该区域上定义了一个矢量函数. 因此，可以应用数学分析的方法来研究矢量函数的有关性质.

矢量函数$\boldsymbol{F}(t)$，$t\in[t_1, t_2]$，如果$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)}{\Delta t}$极限存在，则称此矢量函数$\boldsymbol{F}(t)$在$t$处可导，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$为该点的导矢量. 在一般情况下，矢量的增量$\Delta\boldsymbol{F}$不一定与矢量$\boldsymbol{F}$的方向相同. 如果$\boldsymbol{F}$是一个常矢量，则$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$等于零. 如果矢量函数的一阶导矢量$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$仍然是一个矢量函数，则还可以求出高阶导矢量. 从几何上不难发现，相关联的$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$是与矢量末端轨迹曲线在$t$处切线.

有了矢量函数微分的定义，就可以直接得到矢量函数微分运算的有关公式. 为了方便查阅，这里给出其中一部分经常使用的公式.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}=0(C\text{为常矢量}) \\ \dfrac{\mathrm{d}k\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=k\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}(k\text{为常数}) \\ \dfrac{\mathrm{d}f\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=f\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{F}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(f\text{为标量函数}) \\ \dfrac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot v+u\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}(u\times v)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\times v+u\times\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

二、场的概念

从物理学角度看，场是弥散于空间一定区域的特殊物质，是物质存在的一种基本形式，如引场力、电场、磁场等. 场的物理性质可以用定义在该空间区域的某些物理量描述，这些量是空间坐标和时间的函数，它们随时间的变化描述了场的运动特性. 如果在空间区域内定义的量是标量，则称该场为标量场；如果是矢量，则称该场为矢量场. 如果定义的量与时间无关，成为静态场，反之为时变场. 由于时变场在某个确定时刻的空间分布等同于该空间上的非时变场，因此本章后续只针对非时变场讨论，这些结果同样可以应用于时变场.

从数学上看，场是定义在确定空间区域上的函数. 静态标量和矢量场分别用函数$u(x, y, z)$和$F(x, y, z)$表示，时变标量场和矢量场可分别用$u(x, y, z, t)$和$\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$表示.

在直角坐标系中，矢量场又可以表示为

$$\boldsymbol{F}(x, y, z, t)=\sum_{i=1}^{3}\hat{\boldsymbol{e}}_i\boldsymbol{F}_i(x, y, z, t)\quad(i=1, 2, 3)$$

其中，$\boldsymbol{F}_i(x, y, z, t)$为矢量场$\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$在正交曲线坐标系第$i$坐标轴（$i=1, 2, 3$分别与$x, y, z$轴对应）上的投影或分量，其数值为

$$F_i(x,\ y,\ z,\ t)=|F(x,\ y,\ z,\ t)|\cos\theta_i$$

其中θ_i为矢量$\boldsymbol{F}$与单位坐标矢量$\hat{\boldsymbol{e}}_i$的夹角. 因此，一个矢量场实际上包含了三个标量场.

三、导体系的电位与电位系数

线性介质中导体的电位为常数，并且在确定参考电位的情况下，同一导体的电位与其所带电荷量之间存在简单的线性关系. 如孤立导体，电位ϕ与电荷量之比满足：$\phi=pq$. 这说明对于线性介质中几何形状一定的导体，电位与所带电荷量之间存在简单的线性关系，不因电荷量的改变而改变. 但不同几何形状的导体，电位与电荷量的比值不同. 如带等量电荷的导体球和圆盘对于相同参考点的电位不同，因此比例系数是导体几何形状的函数.

如果线性介质中存在多个导体，导体系中各导体的电位与其所带电荷之间的关系又如何呢？例如把一带负点的导体 B 移近带电导体 A，导体 A 和 B 电荷分布发生改变，导体 A 电位也将下降. 由此可见，当存在多个导体时，某个导体的电位不仅与其自身带电量的多少有关，还与周围其他导体的位置和所带电量有关.

为了得到导体系中各导体所带电荷与电位之间的关系，设线性介质空间中有n个带电导体，导体i的带电量为q_i. 线性介质导体系中各导体的电位与各个导体所带电荷之间的关系，可通过如下方式得到：在导体系中首先给导体k独立充电到电荷量为q_k，而其余导体均不带电. 根据导体电位的特性，各个导体上的电位均为空间电场自参考点至该导体表面任意点的路径积，且积分与路径选择无关，仅与参考点和导体表面任意点有关. 另外，当空间导体系的位置确定后，空间的电场正比于导体k所带的电荷量q_k. 因此，导体系中各导体有正比于电荷q_k的电位. 导体j的电位可以表示为

$$\phi_{jk}=p_{jk}q_k(j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

当整个导体系中每个导体均带电荷，且导体i的带电量为q_i时，根据线性叠加原理，导体j上的电位为导体系中所有导体所带电荷在导体j上产生电位的叠加，即

$$\phi_j=\sum_{k=1}^{n}\phi_{jk}=\sum_{k=1}^{n}p_{jk}q_k\quad(j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

应用矩阵表示如下

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix},$$

其中

$$p_{jk}=\left(\frac{\phi_j}{q_k}\right)\quad(j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

称为电位系数，p_{kk}称为自电位系数，$p_{ik}(i\neq k)$称为互电位系数. 它们只与导体系的形状和空间位形结构有关，与导体系中导体的带电量、电位无关，如果球的导体系电位系数，则可以计算出导体系中各导体所带电荷产生的电位.

仅从上面列举三部分内容的表述中，已经可以看到能代表很多物理量的矢量、矢量函数的工具性的一面，也凸显出矩阵、矩阵运算在表现各个物理量之间的线性叠加关系的方便、简明之处.

第三章自测题

一、单项选择题

1．已知n个向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，从这个向量组中去掉一个向量$\boldsymbol{\alpha}_n$，剩下的$n-1$个向量（　　）.

A．线性相关　　B．线性无关

C．和原向量组等价　　D．无法确定其线性关系

2. 在一组秩等于n的n维行向量组中，加入一个n维行向量组，得到的向量组的秩（　　）.

A．等于$n+1$　　B．等于$n-1$

C．等于n　　D．无法确定

3．对于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$，因为有

$$0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_r=0,$$

则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$是（　　）向量组.

A．全为零向量　　B．线性相关

C．线性无关　　D．任意

4．下列命题正确的是（　　）.

A．不含零向量的向量组一定线性无关

B．线性相关的向量组中必含有两个向量，它们的分量成比例

C．由一个非零向量组成的向量组必线性无关

D．两个n维向量组秩相等必等价

5．设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵且$|\boldsymbol{A}|=0$，则（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$中必有两行（列）元素对应成比例

B．$\boldsymbol{A}$中至少有一行（列）元素全为零

C．$\boldsymbol{A}$中至少有一行向量是其余各行向量的线性组合

D．$\boldsymbol{A}$中每一行向量都是其余各行向量的线性组合

6．下列向量线性相关的是（　　）.

A．(1，1，1)，(1，1，0)，(1，0，0)

B．(2，1，0)，(−1，3，1)，(5，2，0)

C．(7，4，1)，(−2，1，2)，(3，6，5)

D．(−1，3，8)，(−2，0，5)，(2，1，9)

7．若条件（　　）满足，则矩阵$\boldsymbol{A}$的秩等于r.

A．$\boldsymbol{A}$中有r阶子式不等于零

B．$\boldsymbol{A}$中任意$r+1$阶子式等于零

C．$\boldsymbol{A}$中不等于零的子式阶数小于等于r

D．$\boldsymbol{A}$中不等于零的子式的最高阶数等于r

8．设矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$等价，$\boldsymbol{A}$有一个三阶子式不等于零，则$\boldsymbol{B}$的秩（　　）.

A．小于3　　B．等于3　　C．大于等于3　　D．小于等于3

9．n阶方阵$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵的充要条件是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$ 的每一行都不为零　　B．$\boldsymbol{A} \neq 0$

C．$\boldsymbol{A}$ 中行向量两两线性无关　　D．$\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n

10．向量组的 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 秩为 r 的充要条件是（　　）．

A．向量组不含零向量

B．向量组没有两个向量的对应分量成比例

C．向量组有一个向量不能由其余向量线性表出

D．向量组线性无关

11．$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随，$\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶子式都等于零，则（　　）．

A．$r(\boldsymbol{A}) \leqslant 0$，$r(\boldsymbol{A}^*) = 0$　　B．$r(\boldsymbol{A}) = 1$，$r(\boldsymbol{A}^*) = 0$

C．$r(\boldsymbol{A}) \leqslant 0$，$r(\boldsymbol{A}^*) = 1$　　D．$r(\boldsymbol{A}) = 2$，$r(\boldsymbol{A}^*) = 1$

12．$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则（　　）．

A．$\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量线性无关

B．$\boldsymbol{A}$ 的某一行向量可用其余行向量线性表出

C．$\boldsymbol{A}$ 的任一行向量均可用其余行向量线性表出

D．$\boldsymbol{A}$ 的秩小于 n

13．一个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s > 1)$ 线性相关的充要条件是（　　）．

A．含有零向量

B．有两个向量的元素对应成比例

C．有一个向量是其余向量的线性组合

D．每一个向量是其余向量的线性组合

14．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 适合条件（　　）时，它的秩等于 r．

A．$\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量线性相关

B．$\boldsymbol{A}$ 中任意 r 个列向量线性相关

C．$\boldsymbol{A}$ 中有 r 个列向量线性无关

D．$\boldsymbol{A}$ 中线性无关的列向量有 r 个，但容易 $r+1$ 个列向量线性相关

15．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 秩相同，则（　　）．

A．它们必等价

B．若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 行列数分别相同，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价

C．$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都能通过初等变换化为单位矩阵

D．存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$

16．设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的基础解系，下列向量中不能构成 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的基础解系是（　　）．

A．$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$

C．$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$　　D．$\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$

17．$\boldsymbol{AX} = 0$ 是 n 元线性方程组，已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r < n$，则下列结论正确的是（　　）．

A．该方程组只有零解　　B．该方程组有 r 个线性无关的解

C．该方程组有 $n-r$ 个解　　D．该方程组有 $n-r$ 个线性无关的解

18．非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的秩都等于 4，$\boldsymbol{A}$ 是 4×6 矩阵，则（　　）．

A．方程组有唯一一组解　　　　B．方程组有无穷多组解

C．方程组无解　　　　D．无法确定方程组是否有解

19．方程组$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+6x_2-4x_3=0 \end{cases}$的一组基础解系由（　　）个向量组成.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

20．设$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$的解，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解，则（　　）.

A．$2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta}_1$为$\boldsymbol{AX}=0$的解　　　　B．$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解

C．$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$为$\boldsymbol{AX}=0$的解　　　　D．$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解

二、解答题

1．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，问：（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？证明你的结论；（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？证明你的结论.

2．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，而$\boldsymbol{\beta}_2$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示. 证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

3．设$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，但能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，证明：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_3$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.

4．设齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$有非零解，其中$\boldsymbol{A}$是三阶方阵. 证明：若向量组$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示，则向量组$\boldsymbol{B}$线性相关.

5．t取何值时，向量组$(1, 1, 0)$，$(1, 3, -1)$，$(5, 3, t)$线性相关？线性无关？

6．求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$的秩.

7．b_1，b_2，b_3满足什么关系时，下列方程组有解？

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=b_1 \\ x_1+x_3=b_2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=b_3 \end{cases}$$

8．已知$\boldsymbol{A}$是n阶方阵（$n \geqslant 2$），试证：

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & 当R(\boldsymbol{A})=n时 \\ 1, & 当R(\boldsymbol{A})=n-1时 \\ 0, & 当R(\boldsymbol{A})<n-1时 \end{cases}$$

9．已知行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

A_{ij}是$\boldsymbol{D}$中元素a_{ij}的代数余子式，试证：

（1）$(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{13}, \boldsymbol{A}_{14})^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{cases}$$

的非零解；

（2）$(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{13}, \boldsymbol{A}_{14})^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的基础解系.

10．已知 $\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解，$R(\boldsymbol{A})=r<n$．试证：$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的一个基础解系.

第四章　特　征　值

矩阵的相似关系不仅可以用来简化矩阵运算以及简化线性方程组，而且在理论上也非常重要. 本章主要介绍矩阵的特征值与特征向量、矩阵对角化的条件和方法以及实对称矩阵的对角形等内容.

第一节　矩阵的特征值与特征向量

一、特征值与特征向量

定义 4.1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{X}$ ，使关系式

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X} \tag{4.1}$$

成立，则称数 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而非零列向量 $\boldsymbol{X}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

显然，如果 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的一个特征向量，那么对于任意的 $a\in R(a\neq 0)$ ，都有 $\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{\xi})=a\boldsymbol{A\xi}=a\lambda\boldsymbol{\xi}=\lambda(a\boldsymbol{\xi})$.

因此，$a\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，这表明 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ 所对应的特征向量有无穷多个.

但是，一个特征向量不能同时属于两个不同的特征值. 因为若 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 和 λ_2（其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$ ）的特征向量，则

$\boldsymbol{AX}=\lambda_1\boldsymbol{X}$ ，$\boldsymbol{AX}=\lambda_2\boldsymbol{X}$. 从而 $\lambda_1\boldsymbol{X}=\lambda_2\boldsymbol{X}$ ，即 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{X}=0$ ，因为 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ ，所以 $\boldsymbol{X}=0$ ，这与特征向量 $\boldsymbol{X}\neq 0$ 矛盾.

下面讨论特征向量的求法. 式（4.1）也可写为

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0\,, \tag{4.2}$$

即特征向量 $\boldsymbol{X}$ 是齐次线性方程组（4.2）的非零解，而方程组（4.2）有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0 \tag{4.3}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

式（4.3）是以 λ 为未知量的一元 n 次方程，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程. 方程的左端 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 是 λ 的一个 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$ ，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程（4.3）的根，因此特征值也称特征根. 由代数基本

定理，n 次方程在复数范围内一定有 n 个根（重根按重数计算），因此 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值，而特征值 λ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{X}$ 就是齐次线性方程组（4.2）的非零解.

当 λ 为实数时，$\boldsymbol{X}$ 可取实向量；当 λ 为复数时，$\boldsymbol{X}$ 可取复向量.

由上述讨论，可得出特征值与特征向量的求解方法步骤如下：

（1）求特征多项式 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$；

（2）解特征方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$，求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值；

（3）对每个特征值 $\lambda=\lambda_i$，求出齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$ 的非零解，即为 $\lambda=\lambda_i$ 所对应的全部特征向量.

例 1　求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)-20=(\lambda-7)(\lambda+2)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7$，$\lambda_2=-2$.

当 $\lambda_1=7$ 时，对应的特征向量应满足

$$\begin{bmatrix}3-7 & 4\\ 5 & 2-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}-4x_1+4x_2=0\\ \ \ 5x_1-5x_2=0\end{cases}$$

解得 $x_1=x_2$，从而得基础解系为 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

所以对应于 $\lambda_1=7$ 的全部特征向量为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2=-2$ 时，由

$$\begin{bmatrix}3-(-2) & 4\\ 5 & 2-(-2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

解得 $x_1=-\dfrac{4}{5}x_2$，从而得基础解系为

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}-\dfrac{4}{5}\\ 1\end{bmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_2=-2$ 的全部特征向量为 $\boldsymbol{X}=k_2\begin{bmatrix}-\dfrac{4}{5}\\ 1\end{bmatrix}(k_2\neq 0)$.

例 2　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$，由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{P}_1(k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})X=0$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix},$$

因此对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{P}_2(k_2\neq 0)$.

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$，由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $k_1P_1(k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解方程 $(A-\lambda E)X=0$，由

$$A-2E=\begin{bmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$P_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},$$

因此对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_2P_2+k_3P_3$（k_2，k_3 不同时为 0）.

此例说明：属于同一个特征值的特征向量的非零线性组合，还是属于这个特征值的特征向量. 但要注意，属于不同特征值的特征向量的非零线性组合不再是特征向量.

例 4 设 λ 是矩阵 A 的特征值，证明：λ^2 是 A^2 的特征值.

证 因为 λ 是矩阵 A 的特征值，故有非零向量 X，使 $AX=\lambda X$

于是有

$$A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda(\lambda X)=\lambda^2X$$

所以 λ^2 是 A^2 的特征值.

二、特征向量的性质

定理 4.1 设 λ_1，λ_2，…，λ_m 是矩阵 A 的 m 个特征值，与它们相对应的特征向量依次是 P_1，P_2，…，P_m，若 λ_1，λ_2，…，λ_m 互不相等，则 P_1，P_2，…，P_m 线性无关.

证 用数学归纳法来证明.

当 $m=1$ 时，定理显然成立，因为任意一个非零向量都是线性无关的.

假定对 $m-1$ 个互异特征值，定理成立，那么要证明对 m 个互异特征值定理也成立. 为此，假设

$$k_1P_1+\cdots+k_{m-1}P_{m-1}+k_mP_m=0,$$

因为 $AP_i=\lambda_iP_i$，用 A 左乘上式得

$$k_1\lambda_1P_1+\cdots+k_{m-1}\lambda_{m-1}P_{m-1}+k_m\lambda_mP_m=0,$$

从上述两式消去 P_m，就得到

$$k_1(\lambda_1-\lambda_m)P_1+\cdots+k_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)P_{m-1}=0,$$

但根据假定 P_1，P_2，…，P_{m-1} 线性无关，又因 $\lambda_i-\lambda_m\neq 0$，所以 $k_1=0$，…，$k_{m-1}=0$，于是由第一个式子可知必有 $k_m=0$，这就是说 P_1，P_2，…，P_m 线性无关.

推论 如果 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 有 n 个线性无关的特征向量.

例 5 设 λ_1，λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，X_1，X_2 是 A 的分别属于 λ_1，λ_2 的特征向量，证明 X_1+X_2 不是 A 的特征向量.

证 用反证法，假设 X_1+X_2 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$$A(X_1+X_2)=\lambda(X_1+X_2)$$

即
$$AX_1+AX_2=\lambda X_1+\lambda X_2$$

由已知
$$AX_1=\lambda X_1，AX_2=\lambda X_2$$

代入上式得
$$\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2=\lambda X_1+\lambda X_2$$

即
$$(\lambda_1-\lambda)X_1+(\lambda_2-\lambda)X_2=\mathbf{0}$$

由定理 4.1 知 X_1，X_2 线性无关，所以 $\lambda_1-\lambda=0$，$\lambda_2-\lambda=0$，则 $\lambda_1=\lambda_2$，这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，故假设不成立，所以 X_1，X_2 不是 A 的特征向量.

习题 4.1

1．求下列矩阵的特征值与特征向量

（1）$\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

2．已知 A 为 n 阶方阵，试证

（1）A 与其转置阵 A^{T} 有相同的特征值；

（2）若 $A^2=A$（称 A 为等幂矩阵），则 A 的特征值只能是 0 或 1；

（3）若 $A^2=E$（称 A 为对合矩阵），则 A 的特征值只能是−1 或+1.

3．已知 λ 是矩阵 A 的特征值，X 是对应于 λ 的特征向量. 试证

（1）$\lambda+1$ 是矩阵 $A+E$ 的特征值，X 是对应于 $\lambda+1$ 的特征向量；

（2）λ^k 是 A^k（$k\geqslant 2$ 的整数）的特征值，X 是对应于 λ^k 的特征向量；

（3）$k\lambda$（k 是非零的常数）是矩阵 kA 的特征值，X 是对应于 $k\lambda$ 的特征向量.

4．已知 λ 是可逆矩阵 A 的特征值. 试证：（1）$\lambda\neq 0$；（2）$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值；（3）$\dfrac{|A|}{\lambda}$ 是伴随矩阵 A^{T} 的特征值.

5．已知

$$A=\begin{bmatrix}2&x&2\\5&y&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$$

的特征值为 $(-1,\ -1,\ -1)$，试求 x，y 及 A 的特征向量.

第二节　相似矩阵

一、相似矩阵的概念

定义 4.2　设 A 与 B 都是 n 阶方阵，若有可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=B，$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

如
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3&1&1\\-5&3&1\\-5&1&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

三者满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

矩阵的相似关系有以下性质.

（1）反身性，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似；

（2）对称性，即若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似；

（3）传递性，即若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

下面我们进一步讨论相似矩阵的性质.

定理 4.2 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也相同.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. 故
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|\end{aligned}$$

推论 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵
$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$
相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证 由 $|\boldsymbol{\Lambda}-\lambda\boldsymbol{E}|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$，得 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 n 个特征值，根据定理 4.2 可知 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

定理 4.3 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行列式相等，即 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$.

推论 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

定义 4.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，对 $\boldsymbol{A}$ 作运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，称为对 $\boldsymbol{A}$ 作相似变换，其中 $\boldsymbol{P}$ 称为相似变换矩阵.

相似变换是矩阵的一种运算，在相似变换下，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变成
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}.$$

如上面例子中，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

二、相似变换矩阵的求法

在一定条件下，可以用相似变换将矩阵化为对角矩阵，下面就来讨论矩阵对角化的条件和如何将其化为对角矩阵的问题. 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 寻求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，这一过程称为将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化.

假设已经找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，由此得 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$. 将 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为 $\boldsymbol{P}=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$，则有

$$\boldsymbol{A}(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda_1 p_1,\ \lambda_2 p_2,\ \cdots,\ \lambda_n p_n)$$

也就是 $(\boldsymbol{A}p_1,\ \boldsymbol{A}p_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}p_n)=(\lambda_1 p_1,\ \lambda_2 p_2,\ \cdots,\ \lambda_n p_n)$. 因此

$$\boldsymbol{A}p_i=\lambda_i p_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

可见 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{P}$ 的列向量 p_i 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

反之，若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$，那么由这 n 个特征向量即可构成矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_1\quad p_2\quad \cdots\quad p_n)$，且 $\boldsymbol{P}$ 可逆，使 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$. 于是有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，亦即 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

注意：因特征向量不是唯一的，所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也不是唯一的，并且还有可能是复矩阵.

由上面的讨论可得以下定理.

定理 4.4　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似（即 $\boldsymbol{A}$ 能对角化）的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

由定理 4.1 和定理 4.4 可得以下推论.

推论　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

例　已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{bmatrix},$$

（1）试证：$\boldsymbol{A}$ 可以对角化；

（2）试求 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 使得 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{AQ}_2$ 为对角矩阵，其中 $\boldsymbol{Q}_1\neq\boldsymbol{Q}_2$.

解　（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -1\\ -2 & -2-\lambda & 2\\ 3 & 6 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(4+\lambda),$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-4$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix}3-2 & 2 & -1\\ -2 & -2-2 & 2\\ 3 & 6 & -1-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

的基础解系为

$$\boldsymbol{P}_1=(-2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{P}_2=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

当 $\lambda=-4$ 时，齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3+4 & 2 & -1 \\ -2 & -2+4 & 2 \\ 3 & 6 & -1+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

的基础解系为

$$\boldsymbol{P}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$，于是 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

（2）若令

$$\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_2=(2\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

可以验证

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{bmatrix}.$$

此例说明当 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根时，只要能找到 n 个线性无关的特征向量，那么就可以将 $\boldsymbol{A}$ 对角化.

一个矩阵具备什么条件才能对角化？这是一个较复杂的问题，我们对此不进行一般性讨论，而仅讨论当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵的情形.

习题 4.2

1．已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} 与 \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{bmatrix}$$ 相似，求 x 与 y.

2．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

3．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{P}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

4．判断下列矩阵能否化为对角矩阵，如果能，就求 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5．试证：两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时，它们不一定相似；而当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必然等价.

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$（k 为正整数）.

第三节　向量的正交化

一般地，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定可以对角化. 然而，实对称矩阵一定可以对角化，实对称矩阵的这一性质使其有广泛的应用. 为了讨论实对称矩阵的有关性质，首先我们把高等数学中三维向量的数量积概念进行推广.

一、向量的内积

定义 4.4　设有 n 维向量 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，令

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

我们称 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ 为向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的内积，也可写为

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

内积有如下的性质，设 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ 为 n 维向量，λ 为实数，则：

（1）$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]=[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]$；

（2）$[\lambda\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]=\lambda[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]=[\boldsymbol{X}, \lambda\boldsymbol{Y}]$；

（3）$[\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]=[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}]+[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]$.

当 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]=0$ 时，称向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 正交，显然，若 $\boldsymbol{X}=0$，则 $\boldsymbol{X}$ 与任何向量都正交. 这里的正交概念实际上是三维空间垂直概念的拓广.

当向量组 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 的向量两两正交时，即 $[\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j]=0\ (i\neq j,\ i, j=1, 2, \cdots, n)$，我们称该向量组为正交向量组.

定义 4.5　令 $\|\boldsymbol{X}\|=\sqrt{[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，我们称 $\|\boldsymbol{X}\|$ 为 n 维向量 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的长度（或范数）.

当 $\|\boldsymbol{X}\|=1$ 时，称 $\boldsymbol{X}$ 为单位向量. 把非零向量化为单位向量称为向量的单位化，这只需将向量除以其长度 $\|\boldsymbol{X}\|$ 即可，例如向量 $\boldsymbol{X}=(2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$，$\|\boldsymbol{X}\|=3$，将向量 $\boldsymbol{X}$ 化为单位向量 $\alpha=\dfrac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|}=\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

向量的长度具有如下的性质.

（1）非负性：当 $\boldsymbol{X}\neq 0$ 时，$\|\boldsymbol{X}\|>0$. 当 $\boldsymbol{X}=0$ 时，$\|\boldsymbol{X}\|=0$；

（2）齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{X}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{X}\|$（$\lambda$ 为实数）;

（3）三角不等式；$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|\leqslant\|\boldsymbol{X}\|+\|\boldsymbol{Y}\|$.

二、标准正交基

定理 4.5　若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组两两正交的零向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

证　设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r=0,$$

以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ 左乘上式两端得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0,$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2\neq 0$，从而必有 $\lambda_1=0$，类似可证 $\lambda_2=0, \cdots, \lambda_r=0$. 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

根据这一性质，我们常采用正交向量组作为向量空间的基.

例 1 已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中两个向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}} \text{ 正交}$$

试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 两两相交.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，由题意应有

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0, \quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_3=0 \end{cases}$$

由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=-2x_3 \end{cases}$$

从而有基础解系 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，因此取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 即可. 此方程组的任一非零解都可以作为 $\boldsymbol{\alpha}_3$.

定义 4.6 设 n 维向量组 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_r$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，若 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_r$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个标准正交基.

容易验证，$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个标准正交基.

又如 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{R}^4$ 的一个标准正交基.

三、向量组的正交化

任给一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，把它们化为两两正交的向量，称为向量组的正交化.

我们可以用以下方法把 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 正交化，取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1;$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1;$$

……

$$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\ \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}.$$

容易验证$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_r$两两正交，且$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r$等价.

上述从线性无关向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r$导出正交向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_r$的过程称为施密特（Schmidt）正交化过程. 它不仅满足$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r$等价，还满足：对任何$k(1\leqslant k\leqslant r)$，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_k$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$等价.

例 2　已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，求一组非零向量$\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$，使$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$两两正交.

解　$\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$应满足方程$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$，即

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

它的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(0,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. 显然，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2$线性无关，只需将其正交化，也即取

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_1]}\boldsymbol{\xi}_1.$$

其中$[\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2]=1,\ [\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_1]=2$，于是得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(-1,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}}$$

定义 4.7　如果n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}(\text{即}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),$$

那么称$\boldsymbol{A}$为正交矩阵.

如，单位矩阵$\boldsymbol{E}$是一个正交矩阵，因为$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$.

上式用$\boldsymbol{A}$的列向量表示，即是

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{E},$$

亦即$(\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j)=(\delta_{ij})$，这也就是$n^2$个关系式

$$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{当}i=j\\ 0,\ \text{当}i\neq j\end{cases}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

这就说明：矩阵$\boldsymbol{A}$为正交矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的列向量都是单位向量，且两两正交.

考虑到$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$等价，所以上述结论对$\boldsymbol{A}$的行向量也成立.

定理 4.6　n阶方阵$\boldsymbol{A}$为正交矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的列（行）向量都两两正交且都是单位向量.

定义 4.8　若$\boldsymbol{P}$为正交矩阵，则线性变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$称为正交变换.

设$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$为正交变换，则有

$$\|\boldsymbol{Y}\|=\sqrt{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}}=\sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}}=\sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}=\|\boldsymbol{X}\|,$$

按$\|\boldsymbol{X}\|$表示向量的长度，相当于线段的长度，$\|\boldsymbol{Y}\|=\|\boldsymbol{X}\|$说明经正交变换线段长度保持不变，这是正交变换的特性.

习题 4.3

1．把下列向量组正交化.

（1）$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}$；（2）$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&2\end{bmatrix}$.

2．设已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 0,\ 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,\ 3,\ 2)^{\mathrm{T}}$线性无关，求与此向量组等价的正交单位向量组.

3．证明正交矩阵的下列性质：

（1）若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正交矩阵；

（2）若$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}_2$为同阶正交矩阵，则$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$也是正交矩阵；

（3）若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

4．已知两个正交单位向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{9},\ -\frac{8}{9},\ -\frac{4}{9}\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{8}{9},\ \frac{1}{9},\ -\frac{4}{9}\right)^{\mathrm{T}}$求列向量$\boldsymbol{\alpha}_3$，使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$为列向量构成的矩阵$\boldsymbol{Q}$为正交的.

第四节 实对称矩阵的对角化

定理 4.7 实对称矩阵的特征值是实数.

证 设$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，复数λ为$\boldsymbol{A}$的特征值，而复向量$\boldsymbol{X}$为对应的特征向量，即$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}\neq 0$. 用$\bar{\lambda}$表示$\lambda$的共轭复数，$\bar{\boldsymbol{X}}$表示$\boldsymbol{X}$的共轭复向量，由于$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}=\overline{\boldsymbol{AX}}=\overline{\lambda\boldsymbol{X}}$，由此可得以下两式

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{X})=\lambda(\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\overline{\lambda\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\bar{\lambda}(\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})$$

两式相减得到$(\bar{\lambda}-\lambda)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$，但因$\boldsymbol{X}\neq 0$，即

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum_{i}^{n}|x_i|^2=0$$

因此必有$\lambda=\bar{\lambda}$，即λ为实数.

由此可知，当$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$时，其特征值$\lambda_i$为实数，即齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$$

是实系数方程组，由$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$可知必有实的基础解系，因而对应的特征向量为实向量.

定理 4.8 实对称阵的不同的特征值，它们所对应的特征向量是正交的.

证 设λ_1与λ_2为实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的两个特征值，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，它们所对应的特征向量为$\boldsymbol{P}_1$与$\boldsymbol{P}_2$，

由于，$AP_1=\lambda_1P_1$，$AP_2=\lambda_2P_2$，

从而，$\lambda_1P_1=(\lambda_1P_1)^{\mathrm T}=P_1^{\mathrm T}A$，

于是，$\lambda_1P_1^{\mathrm T}P_2=P_1^{\mathrm T}AP_2=P_1^{\mathrm T}\lambda_2P_2=\lambda_2P_1^{\mathrm T}P_2$，

由此式可得，$(\lambda_1-\lambda_2)P_1^{\mathrm T}P_2=0$，但 $\lambda_1\neq\lambda_2$，

所以 $P_1^{\mathrm T}P_2=0$，即 P_1 与 P_2 正交.

定理 4.9 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

事实上，当 n 阶实对称矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值时，由定理 4.8 知，它们对应的实特征向量 P_1，P_2，…，P_n $(P_i\neq0$，$i=1$，2，…，$n)$ 是两两正交的（当然也是线性无关的），经单位化之后，再以它们为列向量即可构成正交矩阵 $P=\left[\dfrac{P_1}{\|P_1\|},\ \dfrac{P_2}{\|P_2\|},\ \cdots,\ \dfrac{P_n}{\|P_n\|}\right]$，并有 $P^{-1}AP=P^{-1}P\Lambda=\Lambda$，其中对角矩阵 Λ 的对角元素 λ_i $(i=1$，…，$n)$ 恰是 A 的 n 个特征值. 而当 n 阶对称矩阵 A 的特征根有重根时，它仍然有 n 个线性无关的实特征向量（此结论证明从略），此时定理也成立.

例 1 设 $A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

解 A 为实对称矩阵，又
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=(2-\lambda)(4-\lambda)^2,$$
故得特征值
$$\lambda_1=2，\lambda_2=\lambda_3=4.$$

当 $\lambda_1=2$ 时，由
$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$
解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，单位特征向量可取 $P_1=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{\sqrt2}\\-\dfrac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时，由
$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

基础解系中两个向量恰好正交，单位化后即得两个单位正交的特征向量

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}，\boldsymbol{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

于是得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}_1，\boldsymbol{P}_2，\boldsymbol{P}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

可以验知确有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

此例中对应于 $\lambda = 4$，若求得方程 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = 0$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则需把它们正交规范化（即把向量组正交化、单位化）.

取 $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1$，正交化，$\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = (1，-1，1)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{[\boldsymbol{\xi}_2，\boldsymbol{\eta}_1]}{[\boldsymbol{\eta}_1，\boldsymbol{\eta}_1]}\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再单位化，即得

$$\boldsymbol{P}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|}\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|}\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

可以验知仍有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$. 此例也说明，化实对称矩阵为对角矩阵时，所求得的正交矩阵不是唯一的.

习题 4.4

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 行 n 列实矩阵，求证：$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 均为对称矩阵.

2．试对下列各实对称阵分别求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$；（4）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

3．设 λ_0 为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，求证：

（1）λ_0 也是矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 的特征值；

（2）矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 的属于 λ_0 的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

4．设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，试证：存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

5．设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$，而对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

第五节　层次分析法（AHP）的应用

层次分析法是一种实用的多准则决策方法. 层次分析法把一个复杂的问题表示为一个有序的递阶层次结构，利用人们的判断对决策方案的优劣进行排序. 这种方法能够统一处理决策中的定性与定量因素，具有系统性、简洁性、实用性、有效性等优点，特别适合在社会经济系统的决策分析中使用.

层次分析法（The Analytic Hierarchy Process，以下简称 AHP）是美国著名运筹学家、匹兹堡大学教授 T.L.Saaty 于 20 世纪 70 年代中期提出的，是一种定性分析与定量分析相结合的决策分析方法. AHP 将决策者对复杂对象的决策思维过程系统化、模型化、数学化，对于结构复杂的多准则、多目标决策问题，是一种有效的决策分析工具.

自 20 世纪 80 年代初，AHP 被介绍到我国以来，已经在经济分析、科研管理、人才预测与规划、企业管理等领域得到了广泛的应用. 由于这种方法思路简明、数学方法简单，同时可以把决策者的判断吸收进来，因此受到国内大多数应用部门的欢迎.

AHP 的基本思想，是根据问题的性质和要求达到的目标，将问题按层次分析成各个组成因素；再按支配关系分组成有序的递阶层次结构；对同一层次内的因素，通过两两比较的方式确定诸因素之间的相对重要性（权重）；下一层次的因素的重要性，既要考虑本层次，又要考虑到上一层次的权重因子；一层层计算下去，直至最后一层（一般是要比较的各个方案）. 比较最后一层各个方案的权重大小，进行排序、决策.

从 AHP 的基本思想可以看出，AHP 的分析、决策过程，体现了人们进行决策思维的基本特征：分解、判断、综合.

一般地，AHP 可按下列步骤进行.

第一步，明确问题.

把复杂问题分解为我们称为元素的各组成部分，搞清各元素之间的相互关系，对整个问题有明确的认识，分清总目标、分目标、约束、部门、可能情况和各种方案等.

第二步，建立递阶层次结构.

这是 AHP 中最重要的一步. 这一步中，将各个元素按属性不同划分为若干组，形成不同层次. 第一层是总目标；中间层是分目标层、部门层、约束层等，也可称为准则层、子准则层；最低层一般是解决问题的方案. 同一层次的元素作为准则对下一层某些元素起支配作用，同时它又受上一层次元素支配. 这种从上至下的支配关系形成了一个递阶层次. 层次元素之间的支配关系不一定是完全的，即可以有这样的元素，它并不支配下一层次的所有元素. 划分层次，确定不同层次之间元素的相互作用，主要取决于对提出问题的了解和分析. 一个典型的递阶层次可以用图 4-1 表示出来.

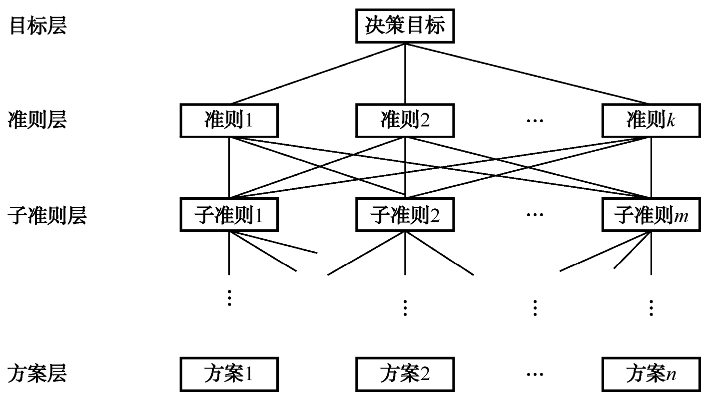


图 4-1　递阶层次

第三步，构造两两比较判断矩阵.

建立递阶层次结构后，上下层次之间元素的隶属关系就被确定了. 假定上一层次的元素 C_k 作为准则，对下一层次的元素 A_1，A_2，…，A_n 有支配关系. 我们的目的是在准则 C_k 之下按它们相对重要性赋予 A_1，A_2，…，A_n 相应的权重. 对于大多数社会经济问题，特别是那些人的判断起重要作用的问题中，直接得到这些元素的权重并不容易，AHP 中是用两两比较的方法导出它们的权重.

在这一步中，决策要反复回答问题：针对准则 C_k 两个元素 A_i 和 A_j 哪一个更重要一些，重要多少，需要对重要多少赋一定数值. 这里采用 1～9 的标度，它的意义如表 4-1 所示.

表 4-1　标度及其描述

标　　度	意　　义	说　　明
1	A_i 与 A_j 同等重要	① A_i、A_j 为同一层次的两个因素
3	A_i 比 A_j 稍重要	② 按某准则（即相对于上层次某因素）进行判断
5	A_i 比 A_j 重要	
7	A_i 比 A_j 重要得多	
9	A_i 比 A_j 绝对重要	
2.4.6.8	为上述相邻判断的中值	需要两个判断的折衷

若因素 A_i 与 A_j 的比较得 a_{ij}，则因素 A_j 与 A_i 的比较得 $1/a_{ij}$.

将比较判断用标度表示，是将人们的思维判断量化的一种方法. 采用 1～9 标度，与人们日常用相等、较强、强、很强、绝对强这类语言表达判断是一致的. 另外，从心理学角度讲，9 个数字足以表述人们在同时比较某种属性差异的判断.

对于 C_k 准则下，几个元素 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…，$\boldsymbol{A}_n$ 来说，可以得到一个 $n\times n$ 阶的判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，也可用表格形式给出如表 4-2 所示.

表 4-2

C_k	A_1	A_2	…	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}

判断矩阵具有如下性质.

（1）$a_{ij}>0$；

（2）$a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$；

（3）$a_{ii}=1$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 具有上述性质，称为正的互反矩阵. 根据性质（2）、（3），构造判断矩阵时，我们仅需要对其上（下）三角元素给出 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个判断.

例如，下面的判断矩阵给出如下含义

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 6\\ 3 & 1 & 5\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}&a_{12}=\frac{1}{3}(A_2\text{比}A_1\text{销重要})\\ &a_{13}=6(A_1\text{比}A_3\text{处于重要和重要得间})\\ &a_{23}=5(A_2\text{比}A_3\text{重要})\end{aligned}$$

第四步，计算单一准则下的相对权重.

这一步要解决在 C_k 准则下，在判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件下，A_1、A_2、…、A_n 排序权重计算问题.

先求解特征根问题：$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{W}}=\lambda_{\max}\overline{\boldsymbol{W}}$.

其中，$\overline{\boldsymbol{W}}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，各分量为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之权重值，$\lambda_{\max}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最大实特征根. 由线性代数理论可证，$\lambda_{\max}$ 存在且唯一. 当 $\lambda_{\max}$ 确定后，方程的解 $\overline{\boldsymbol{W}}$ 的各分量经归一处理后，作为元素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在准则 C_k 下排序权重.

矩阵方程 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{W}}=\lambda_{\max}\overline{\boldsymbol{W}}$ 的线性方程组形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}w_1+a_{12}w_2+\cdots+a_{1n}w_n=\lambda_{\max}w_1 \\ a_{21}w_1+a_{22}w_2+\cdots+a_{2n}w_n=\lambda_{\max}w_2 \\ \cdots \\ a_{n1}w_1+a_{n2}w_2+\cdots+a_{nn}w_n=\lambda_{\max}w_n \end{cases}$$

此方程组有非零解，且各分量可由正分量组成，经向量归一处理后，解是唯一的. 注意到各方程中，未知量 w_1、w_2、…、w_n 的系数为各因素间相互重要性标度的特点，以及各个方程式含义，取方程组的解 w_1、w_2、…、w_n 经向量归一处理后，作为各因素间的相对权重值是可行的.

求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_{\max}\boldsymbol{I})\overline{\boldsymbol{W}}=0$ 往往比较复杂. 通常采用简单算法去计算 $\overline{\boldsymbol{W}}$ 和 $\lambda_{\max}$ 的值.

其中，判断矩阵的使用，以及矩阵的最大特征根完全源于线性代数的内容.

第五步，一致性检验.

对于判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，当 $a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik}$，或 $a_{ij}=\dfrac{a_{ik}}{a_{jk}}$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为一致性矩阵. 在判断矩阵的构造中，并不要求判断具有一致性，即不要求 $\boldsymbol{A}$ 的元素具有传递性，亦即未必成立等式 $a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik}$. 但要求判断有大体的一致性确是应该的. 为此，要进行一致性检验，其步骤如下.

1．计算一致性指标 $C.I.$

$$C.I.=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

2．由 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 查表 4-3 找出随机一致性指标 $R.I.$ 的值.

表 4-3　$R.I.$ 值表

阶数 n	3	4	5	6	7	8	9
$R.I.$ 值	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

3．计算检验系数 $C.R.$

$$C.R.=\frac{C.I.}{R.I.}$$

当 $C.R.<0.10$ 时，可认为判断矩阵具有满意的一致性.

对于二阶判断矩阵，由于 $\lambda_{\max}=2$，故 $C.I.=0$，则 $C.R.=0$，即二阶判断矩阵具有一致性.

设第 $k-1$ 层有 m 个因素 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，权重分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 第 k 层有 n 个因素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 记 C_i 准则下，因素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的相互权重分别为 ${w^i}_1, {w^i}_2, \cdots, {w^i}_n$　$(i=1, 2, \cdots, n)$.

将上述内容用下面矩阵如表 4-4 所示.

表 4-4　相互权重表

	C_1	C_2	C_3	…	C_m
	a_1	a_2	a_3	…	a_m

续表

	C_1	C_2	C_3	…	C_m
A_1	w_1^1	w_1^2	w_1^3	…	w_1^m
A_2	w_2^1	w_2^2	w_2^3	…	w_2^m
A_3	w_3^1	w_3^2	w_3^3	…	w_3^m
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	w_n^1	w_n^2	w_n^3	…	w_n^m

也可用图 4-2 表示出. 但只标示出了 C_1 准则下 A_1，A_2，…，A_n 间的相互权重，以及 C_1，C_2，…，C_m 准则下对 A_1 的权重.

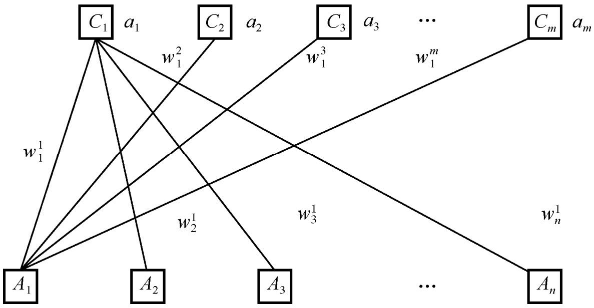


图 4-2

这时，第 k 层元素 A_1，A_2，…，A_n 的组合权重为

$$w_{A_1组} = a_1 w_1^1 + a_2 w_1^2 + a_3 w_1^3 + \cdots + a_m w_1^m = \sum_{i=1}^{m} a_i w_1^i$$

$$w_{A_2组} = a_1 w_2^1 + a_2 w_2^2 + a_3 w_2^3 + \cdots + a_m w_2^m = \sum_{i=1}^{m} a_i w_2^i$$

$$w_{A_3组} = a_1 w_3^1 + a_2 w_3^2 + a_3 w_3^3 + \cdots + a_m w_3^m = \sum_{i=1}^{m} a_i w_3^i$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$w_{A_n组} = a_1 w_n^1 + a_2 w_n^2 + a_3 w_n^3 + \cdots + a_m w_n^m = \sum_{i=1}^{m} a_i w_n^i$$

也可写成矩阵形式

$$\bar{W}_{k组} = \begin{bmatrix} w_{A_1组} \\ w_{A_2组} \\ \vdots \\ w_{A_n组} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^1 & w_1^2 & \cdots & w_1^m \\ w_2^1 & w_2^2 & \cdots & w_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & w_n^2 & \cdots & w_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

应该说明的是，若第 $k-1$ 层，C_i 准则对第 k 层 A_j 准则无支配关系，或即因素 C_i 与因素 A_j 无关时，令 $w_j^i = 0$.

十分明显，计算组合权重应从第三层开始进行. 如此反复进行下去，经有限次计算，可求出最后一层（方案层）的组合权重.

最后，依方案层各个方案的组合权重大小做出方案选择决策.

为了使 AHP 方法直观化，以下通过一个实际的决策问题的解决，说明 AHP 方法的一些特点.

岸间交通方式分析.

为解决河两岸的交通问题，有三个方案可供选择：修筑桥梁、开挖隧道、实行轮渡. 为做出决策，分别进行了过河的效益分析和过河的代价分析，其分层结构如图 4-3 和图 4-4 所示.

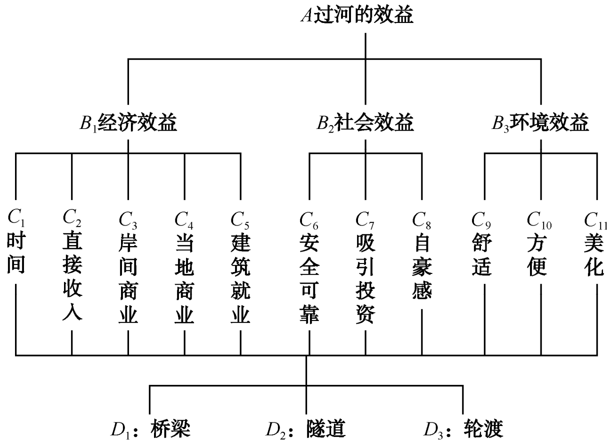


图 4-3 效益图

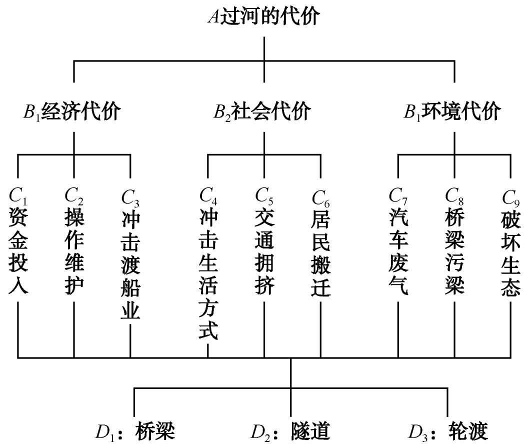


图 4-4 代价图

这里，第一层为总目标 A，第二层为准则层 B_1、B_2、B_3，第三层为子准则层 C_1、C_2、…、C_{11}，第四层（最后一层）为方案层 D_1、D_2、D_3.

A 过河的效益.

过河的代价层次图中，各因素下的判断矩阵给出如下.

A	B_1	B_2	B_3
B_1	1	5	7
B_2	1/5	1	2
B_3	1/7	1/2	1

B_1	C_1	C_2	C_3
C_1	1	7	9
C_2	1/7	1	5
C_3	1/9	1/5	1

B_2	C_4	C_5	C_6
C_4	1	1/3	1/5
C_5	3	1	1/3
C_6	5	3	1

B_3	C_7	C_8	C_9
C_7	1	3	4
C_8	1/3	1	1/3
C_9	1/4	3	1

C_1	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1/3	8
D_2	3	1	9
D_3	1/8	1/9	1

C_2	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1/3	8
D_2	3	1	9
D_3	1/8	1/9	1

C_3	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	9
D_2	1	1	9
D_3	1/9	1/9	1

C_4	D_1	D_2	D_3
D_1	1	4	9
D_2	1/4	1	8
D_3	1/9	1/8	1

C_5	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	9
D_2	1	1	9
D_3	1/9	1/9	1

C_6	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	9
D_2	1	1	9
D_3	1/9	1/9	1

C_7	D_1	D_2	D_3
D_1	1	3	8
D_2	1/3	1	6
D_3	1/8	1/6	1

C_8	D_1	D_2	D_3
D_1	1	3	7
D_2	1/3	1	5
D_3	1/7	1/5	1

C_9	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1/6	7
D_2	6	1	8
D_3	1/7	1/8	1

过河的效益层次图中，各因素下的判断矩阵给出如下.

A	B_1	B_2	B_3
B_1	1	3	6
B_2	1/3	1	2
B_3	1/6	1/2	1

B_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	1	1/3	1/7	1/5	1/6
C_2	3	1	1/4	1/2	1/2
C_3	7	4	1	7	5
C_4	6	2	1/7	1	1/5
C_5	5	2	1/5	1	1

B_2	C_6	C_7	C_8
C_6	1	6	9
C_7	1/6	1	4
C_8	1/9	1/4	1

B_3	C_9	C_{10}	C_{11}
C_9	1	1/4	6
C_{10}	4	1	8
C_{11}	1/6	1/8	1

C_1	D_1	D_2	D_3
D_1	1	2	7
D_2	1/2	1	6
D_3	1/7	1/6	1

C_2	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1/2	8
D_2	2	1	9
D_3	1/8	1/9	1

C_3	D_1	D_2	D_3
D_1	1	4	8
D_2	1/4	1	6
D_3	1/8	1/6	1

C_4	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	6
D_2	1	1	6
D_3	1/6	1/6	1

C_5	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	9
D_2	1	1	9
D_3	1/9	1/9	1

C_6	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	9
D_2	1	1	9
D_3	1/9	1/9	1

C_7	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1	5
D_2	1	1	5
D_3	1/5	1/5	1

C_8	D_1	D_2	D_3
D_1	1	5	3
D_2	1/5	1	1/3
D_3	1/3	3	1

C_9	D_1	D_2	D_3
D_1	1	5	8
D_2	1/5	1	5
D_3	1/8	1/5	1

C_{10}	D_1	D_2	D_3
D_1	1	3	7
D_2	1/3	1	6
D_3	1/7	1/6	1

C_{11}	D_1	D_2	D_3
D_1	1	6	1/5
D_2	1/6	1	1/3
D_3	5	3	1

请对方案 D_1（建桥梁）、方案 D_2（修隧道）、方案 D_3（轮渡）进行决策.

利用计算机及 AHP 的应用软件，我们得到了两岸间最优交通方式的最佳方案.（中间计算过程略）

决策分析结果

$$\max\left\{\frac{D_k\text{过河的效益权重}}{D_k\text{过河的代价权重}}\right\}=$$

$$\max\left\{\frac{w_{21}}{w'_{21}}，\frac{w_{22}}{w'_{22}}，\frac{w_{23}}{w'_{23}}\right\}(k=1，2，3)$$

$$=\max\left\{\frac{0.5692}{0.3623}，\frac{0.3609}{0.5848}，\frac{0.0654}{0.0529}\right\}$$

$$=\max\{1.5711，0.6171，1.2363\}$$

$$=1.5711$$

可见，最优方案为 D_1，即建桥梁为最佳过河方式.

从以上的决策分析过程，可以看到矩阵、矩阵运算和矩阵特征值的运用，在整个 AHP 方法中都起到了至关重要的作用.

第四章自测题

一、选择题

1．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同的特征值对应的特征向量必（　　）.

A．线性相关　　B．线性无关

C．两两正交　　D．不一定有上述关系

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 下列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是（　　）.

A．$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

3．设 $\boldsymbol{A}，\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵且相似，则（　　）.

A．$\boldsymbol{A}，\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角矩阵　　B．$\boldsymbol{A}，\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

C．$\boldsymbol{A}，\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　D．$\boldsymbol{A}，\boldsymbol{B}$ 的行列式可能不同

4．当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合条件（　　）时，它必相似于对角矩阵.

A．$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征向量　　B．$\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵

C．$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值　　D．$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵

5．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，适合 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为（　　）.

A．0 或 1　　B．±1　　C．都是 0　　D．都是 1

6．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵且相似，则下列结论错误的是（　　）．

A．$\lambda I_n - \boldsymbol{A} = \lambda I_n - \boldsymbol{B}$

B．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式.

C．存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$

D．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的行列式相同.

7．下列条件不能保证 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵的是（　　）．

A．$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

B．$\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵且主对角线上的元素互不相同.

C．$\boldsymbol{A}$ 是 n 个线性无关的特征向量.

D．$\boldsymbol{A}$ 的特征值全是实数.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶正交矩阵且 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则下列结论不成立的是（　　）．

A．$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

B．$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价.

C．$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

D．$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 必有相同的特征向量.

9．下列命题错误的是（　　）．

A．属于不同特征值的特征向量必线性无关.

B．属于同一特征值的特征向量必线性相关.

C．相似矩阵必有相同的特征值.

D．特征值相同的矩阵未必相似.

10．设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量，下列式子无意义的是（　　）．

A．$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 - (2\boldsymbol{\alpha}_3)\cdot(3\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1$

C．$[2\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_2]\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot (\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2)$　　D．$\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\boldsymbol{\alpha}_3$

11．x，y 为（　　）时，下列向量组为单位正交向量组：$\boldsymbol{\alpha} = \left(x, 0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\boldsymbol{\beta} = (0, y, 0)$.

A．$x = 0$，$y = 1$　　B．$x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$y = -1$

C．$x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$y = -1$　　D．$x = -1$，$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12．下列命题正确的是（　　）．

A．正交矩阵的行列式的值都等于 1.

B．正交矩阵之和必是正交矩阵.

C．正交矩阵之积必是正交矩阵.

D．行列式的值等于 1 的矩阵都是正交矩阵.

二、解答题

1．求下列矩阵的特征值和特征向量

（1）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 与 y 应满足什么条件？

3．设 2 是矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & t & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

的特征值，求（1）t 的值；（2）对应于 2 的所有特征向量.

4．已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 10 & 6\\ 1 & -3 & -3\\ -2 & 10 & 8\end{bmatrix},$$

求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

第五章 二 次 型

二次型的理论来源于解析几何中对于二次曲线和二次曲面的研究，可以选择适当的坐标变换，将其方程化为标准式.

第一节 二次型的一些概念

一、二次型的概念

在一个多项式中，若每一项都是二次的，则称此多项式为二次齐次多项式.

例如

$$f(x, y)=x^2+3xy+y^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+x_1x_2-x_1x_3+2x_1x_4-5x_2x_3-3x_3x_4+2x_4^2$$

各式右端分别是关于两个、三个、四个变量的二次齐次多项式.

定义 5.1 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+ \\ &2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

称为 n 元二次型，简称二次型. 当 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型.

下面我们仅讨论实二次型.

若取 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是（5.1）式可写成

$$\begin{aligned} f=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{5.2}$$

把二次型（5.1）改写成（5.2）的形式便于与矩阵联系起来.

二、二次型的矩阵表示

根据（5.2）式，利用矩阵可将二次型表示为

$$\begin{aligned} f=&x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n) \\ &+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n) \end{aligned}$$

$$=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可记为

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\,, \tag{5.3}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵. 例如，二次型

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-x_2x_3 \\ &= 2x_1^2-2x_1x_2+0x_1x_3-2x_2x_1+x_2^2-2x_2x_3-0x_3x_1-2x_3x_2+0x_3^2, \end{aligned}$$

用矩阵符号表示出来，就是

$$f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

由于任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵. 反之，任给一个对称矩阵，也可以唯一地确定一个二次型. 这样，二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系. 因此，我们把对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵，而把 f 称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型，于是我们把对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩就称为二次型 f 的秩，这样就可以通过二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来研究二次型.

例 写出二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 的矩阵表示形式.

解

$$f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

三、二次型的标准型

定义 5.2 只含平方项的二次型，称为二次型的标准型（或法式）. 若标准形中平方项的系数为+1、−1 或 0 的，则称此标准形为二次型的规范型. 例如，

$f=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 是普通二次型，

$f=-4x_1^2+4x_2^2+x_3^2$ 是标准型，

$f=-x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是规范型，

又如，二次型 $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 可化为标准型 $f=y_1^2+y_2^2$（其中 $y_1=x_1+x_2,\ y_2=x_2+2x_3$），这也是它的规范型.

显然，对于一般二次型，其标准型

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2 \tag{5.4}$$

的矩阵是对角矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

习题 5.1

1．把下列二次型用 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 形式表示

（1） $f=x_1^2+6x_1x_2+4x_2^2$；

（2） $f=x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$；

（3） $f=-x_1^2+2x_1x_2-3x_2^2-4x_2x_3-2x_1x_3-11x_3^2$；

2．化 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为二次型，已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

3．已给二次型 $f=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$，试对它作下列线性变换

（1） $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$；　　（2） $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

第二节　二次型的标准型

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \tag{5.6}$$

使二次型（5.1）化为只含平方项.

如果（5.6）式的矩阵形式写为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 称为线性变换矩阵. 那么，问题就归结为将（5.7）式代入（5.3）式后将其化为标准型（5.4），即

$$\begin{aligned} f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}&=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}) \\ &=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y} \\ &=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2 \end{aligned}$$

$$=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

这也就是要寻找可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{bmatrix}.$$

由定理 4.7 知，任给以实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，总有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，把此结论应用于二次型，可得到化二次型为标准型的方法.

一、对称矩阵的合同关系

定义 5.3 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，或称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同，记成 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 显然，$\boldsymbol{B}$ 也合同于 $\boldsymbol{A}$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行合同变换，而可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的合同变换矩阵.

1．二次型 $f=\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{AX}$，经可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 后，变成二次型 $f=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BY}$，所得的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与原二次型的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 合同.

定理 5.1 任给可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{B}$ 亦为对称矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.

再证 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$. 因 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$，故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$，又 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{BC}^{-1}$，故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{BC}^{-1})\leqslant R(\boldsymbol{B})$，于是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

2．如前所述，对于二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，我们的任务主要是寻找合同变换矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则这个矩阵 $\boldsymbol{C}$ 必存在，它可取将 $\boldsymbol{A}$ 变为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的正交相似变换矩阵.

事实上，由定理 4.7 知，必存在正交相似变换矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$，而对于正交矩阵 $\boldsymbol{C}$ 必有 $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$.

定理 5.2 任给二次型 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，使 f 化为标准形

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2,$$

其中 $k_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值，$\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵.

由定理 4.8 和定理 4.9 可知，任给以二次型 f 总存在正交相似变换矩阵 $\boldsymbol{C}$（或是合同变换矩阵C），即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$，且矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的秩就等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，即二次型经正交变换所得出的标准形中所含的项数，就是 f 的秩.

二、用正交变换将二次型化为标准型

例 1 用正交变换将二次型

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$$

化为标准型.

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

令
$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 1$.

当 $\lambda_1 = 3$ 时，解齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交，只需单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 1$ 时，解齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

单位化得

$$\eta_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

于是得正交变换矩阵

$$\boldsymbol{C}=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以，原二次型的标准型为

$$f=(\boldsymbol{CY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y}=3y_1^2+3y_2^2+y_3^2$$

用正交变换法化二次型为标准形的步骤.

1．写出二次型 f 的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$；

2．求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量；

3．对于单特征根所对应的特征向量只作单位化，而对重特征根，首先判断其对应的特征向量是否正交，若不正交，则需先进行正交化而后再单位化；

4．用正交单位向量作为列向量写出正交变换矩阵 $\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Lambda}$ 中的 $\lambda_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 从左上角到右下角排列的顺序，应与 $\boldsymbol{C}$ 中的列向量从左到右的排列顺序相对应.

注意：因矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于某一特征值的特征向量有无穷多个，而列向量的排列顺序也不唯一，所以得到的正交变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 不是唯一的，因而所得到的二次型的标准形也不是唯一的.

三、用配方法将二次型化为标准型

例 2 把二次型 $f=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准型，并写出所用的线性变换.

解 此二次型无平方项，通过可逆线性变换，先化成有平方项，然后进行配平方，令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}\tag{5.8}$$

则

$$\begin{aligned}f&=-4(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3+2(y_1-y_2)y_3\\&=-4(y_1^2-y_2^2)+2y_1y_3+2y_2y_3+2y_1y_3-2y_2y_3\\&=-4y_1^2+4y_2^2+4y_1y_3\end{aligned}$$

对 y_1 进行配平方

$$
\begin{aligned}
f &= -4(y_1^2 - y_1y_3) + 4y_2^2 \\
&= -4\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 + y_3^2 + 4y_2^2 \\
&= -4\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 + 4y_2^2 + y_3^2
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{cases}
z_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_3 \\
z_2 = y_2 \\
z_3 = y_3
\end{cases}
\tag{5.9}
$$

于是得标准型 $f = -4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$．为了写出所用的线性变换，先由式（5.9）反解出 y_1、y_2 和 y_3，得

$$
\begin{cases}
y_1 = z_1 + \dfrac{1}{2}z_3 \\
y_2 = z_2 \\
y_3 = z_3
\end{cases}
\tag{5.10}
$$

把式（5.10）代入式（5.8），得

$$
\begin{cases}
x_1 = z_1 + z_2 + \dfrac{1}{2}z_3 \\
x_2 = z_1 - z_2 + \dfrac{1}{2}z_3 \\
x_3 = z_3
\end{cases}
\tag{5.11}
$$

式（5.11）就是所求的线性变换，因为该变换矩阵的行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dfrac{1}{2} \\
1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\
0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = -2 \neq 0
$$

所以线性变换式（5.11）是可逆的，故式（5.11）为所求之可逆线性变换.

由于式（5.11）的变换矩阵为

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \dfrac{1}{2} \\
1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

于是式（5.11）可记为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CZ}$，因而

$$f = X^{\mathrm{T}}AX = (CZ)^{\mathrm{T}}A(CZ) = Z^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Z = -4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$$

其中

$$C^{\mathrm{T}}AC = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般 n 元变量的二次型（5.1），用配方法将其化为标准型的步骤为.

1．若无平方项，即 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$，而某个 $a_{ij} \neq 0$，则可设

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \cdots \\ x_i = y_i + y_j \\ \cdots \\ x_j = y_i - y_j \\ \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

化出平方项；

2．若有平方项，则对其中的非完全平方项逐个配平方；

3．求出可逆线性变换矩阵 $\boldsymbol{C}$，把 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CZ}$ 代入 $f = X^{\mathrm{T}}AX$，则 $f = Z^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Z$ 即为所求的标准型.

注意：（1）在配平方中，主要用到公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

（2）一个二次型经可逆线性变换化为标准型时，其自变量的个数不能增加也不能减少.

习题 5.2

1．用配方法化二次型为标准型

（1）$f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

（2）$f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

2．用正交变换化二次型为标准型

（1）$f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

（2）$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

（3）$f = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$

（4）$f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

3．用正交变换化下列二次型为标准型

（1）$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

（2）$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$

（3）$f = x_2^2 + 2x_1x_3$

4．求可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，把二次型 $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2$ 化为系数全为 1，−1，0 的形式.

5．在平面直角坐标系中，方程 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 4 = 0$ 表示什么样的曲线？

第三节　实二次型的分类与判定法

一、实二次型的分类

在上一节中，已经证明实二次型不论通过何种可逆线性变换化为标准型，其所含项数是确定的，不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正项个数和负项个数也是不变的，且正项个数与负项个数之和恰等于二次型 f 的秩.

定义 5.4　若秩为 r 的 n 元实二次型 f 经可逆线性变换化为标准型

$$f = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \cdots + a_ky_k^2 - a_{k+1}y_{k+1}^2 - \cdots - a_ry_r^2$$
$$(a_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,\ r \leqslant n)\ , \tag{5.12}$$

则称正平方项个数 k 为 f 的正惯性指数，而负平方项个数 $r-k$ 为 f 的负惯性指数.

定理 5.3（惯性定理）　在秩为 r 的 n 元实二次型的标准型中，它的正项个数 k 和负项个数 $r-k$ 都是唯一确定的.

从几何角度考虑就是通过可逆线性变换把二次曲线方程化为标准方程时，方程的系数是与所做的线性变换有关，但曲线的类型（椭圆型，双曲型等）是不会因所做线性变换的不同而有所改变的.

定义 5.5　设实二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ ，对于任意一组不全为零的实数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$ ，

（1）若 $f(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) > 0$ ，则称 f 为正定的，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的；

（2）若 $f(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) < 0$ ，则称 f 为负定的，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的；

（3）若 $f(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) \geqslant 0$ ，则称 f 为半正定的，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的；

（4）若 $f(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) \leqslant 0$ ，则称 f 为半负定的，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半负定的；

（5）若对某些 $(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) \neq 0$ ，有 $f(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) > 0$ ，而对另一些 $(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) \neq 0$ ，又有 $f(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n) < 0$ ，财称 f 为不定的，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不定的.

我们主要讨论正定二次型和正定矩阵.

二、正定二次型和正定矩阵的判别法

定理 5.4　n 元实二次型 $f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$ 为正定的充分必要条件是 $k_i > 0(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

根据定理 5.1 和定理 5.4 可得如下推论.

推论 1　对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

推论 2　若对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定，则$|\boldsymbol{A}|$=0.

例 1　判断二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ 是否正定.

解　二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$．因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不全为正数，所以 f 不是正定的.

定理 5.5　n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定的充分必要条件是其正惯性指数等于 n.

证　设可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$，使

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_nx_n^2, \tag{5.13}$$

因为 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵，所以，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 不全为零是等价的，显然，当 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 不全为零时

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2>0$$

的充分必要条件是：$d_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，即正惯性指数等于 n.

例 2　判断二次型 $f=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$ 是否正定.

解　用配平方法，得

$$f=(2x_3-x_1)^2+(2x_1-x_2)^2+5x_2^2,$$

令

$$\begin{cases}y_1=-x_1+2x_3\\ y_2=2x_1-x_2\\ y_3=x_2\end{cases} \tag{5.14}$$

因变换矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

故式（5.14）是可逆线性变换，经此变换得到 $f=y_1^2+y_2^2+5y_3^2$，因为 f 的正惯性指数等于 3，所以 f 为正定二次型.

定理 5.6　n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定的充分必要条件是其对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零，即

$$a_{11}>0, \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0, \cdots, \begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0;$$

n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为负定的充分必要条件是其奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}>0(r=1, 2, \cdots, n).$$

这个定理称为霍尔维茨定理（证明略）.

例 3　判别二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

解　二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

又因

$$a_{11}=-5<0 \qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0$$

$$|A|=-80<0$$

根据定理 5.4 可知 f 为负定.

例 4　x，y 取何值时，矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & y\end{bmatrix}$$

是正定的?

解　根据定理 5.4，可知矩阵 A 为正定的充分必要条件是其各阶顺序主子式全大于零，即

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & x\end{vmatrix}=x-4>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & x & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & x\end{vmatrix}=2(x-4)>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & y\end{vmatrix}=(x-4)(2y-1)>0$$

解得当 $x>4$，$y>\dfrac{1}{2}$ 时，矩阵 A 为正定.

习题 5.3

1．判断下列二次型是否正定

（1）$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$；

（2）$f=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$；

（3）$f=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$；

（4）$f=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

2．求参数 t 的值，使二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2tx_1x_3-2x_2x_3$ 为正定二次型.

3．已知 A 为 $m\times n$ 实矩阵，试证：AA^{T} 是具有非负特征值的 m 阶实对称矩阵.

4．已知 A 是正定矩阵，且又是正交矩阵，试证：A 是单位矩阵.

5．设 U 为可逆矩阵，$A=U^{\mathrm{T}}U$，证明：$f=X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型.

第四节 在投入产出模型预测法中的应用

投入产出分析亦称投入产出法，投入产出技术或部门间平衡法. 它既是一种进行部门（产品）间综合平衡的计划方法，又是一种预测未来的经济预测法，还是一种对经济结构、经济效益、经济政策和商品价格等经济问题进行综合分析的经济分析方法.

一、投入产出模型

（一）投入产出表

所谓“投入”是指产品生产所需原材料、辅助材料、燃料、动力、固定资产折旧和劳动力投入；所谓“产出”，是指产品生产的总量及其分配使用的方向和数量，包括生产消费、生活消费、出口和积累等. 生产过程就是投入与产出关系的客观反映. 一定时期内产品的产出受投入的影响，产出量也制约着投入. 投入与产出的数量关系可编制一种矩形的表格——投入产出表. 按实物形态编制称为实物表，按价值形态编制称为价值表，两者结构相同但相差一个价格因素. 现以价值形态的（表 5-1）为例，介绍投入产出表.

表 5-1 部门间投入产出表（价值型）

		中间产品							最终产品				总产品
		1	2	…	j	…	N	合计	消费	储备	出口	合计	
物质消耗	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}					y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}					y_2	x_2
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮					⋮	⋮
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}					y_i	x_i
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮					⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}					y_n	x_n
	合计												
净产值	劳动报酬	V_1	V_2	…	V_f	…	V_n						
	社会纯收入	M_1	M_2	…	M_f	…	M_n						
	合计	Z_1	Z_2	…	Z_j	…	Z_n						

注：为简便计，本表未列入固定资产折旧.

设国民经济分为 n 个部门：1，2，⋯，n . 如“1”代表煤炭，“2”代表钢铁，……，这里“部门”是指“产品部门”而非行政划分，即同类产品的产品类. 现以 x_1，x_2，⋯，x_n 表示各部门产品的总价值量（单位时间，如一年内的产品价值量）称为总产品，以 y_1，y_2，⋯，y_n 代表各部门最终产品，即各部门分配给居民个人消费和社会集团消费的生产和非生产性积累、储备、出口等方面的产品，亦即各部门总产品中扣除给其他部门及本部门作生产用的产品之外，不参加生产周转的那一部分产品. X_{ij} 表示第 i 部门分配给第 j 部门的产品，或说第 j 部门在生产过程中对第

i 部门留在本部门产品消耗，也称部门间流量（$i, j=1, 2, \cdots, n$；$X_{ij} \geqslant 0$）. $X_{ii}(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示第 i 部门留在本部门内做生产使用的那部分产品. 如：X_{11} 表示第 1 部门留在本部门内做生产使用的那部分产品；X_{12} 表示第 1 部门分配给第 2 部门的产品. $X_{ij}=0$ 表示第 i 部门没有分配给第 j 部门产品，或第 j 部门在生产中未消耗第 i 部门产品；V_j 表示第 j 部门劳动者报酬即工资总额；M_j 表示第 j 部门为社会劳动创造价值，即纯收入. $V_j+M_j=Z_j$ 称净产值.

表 5-1 被粗实线划分为四个部分.

左上部分：反映国民经济各物质生产部门之间生产和分配关系，即投入与产出关系.

右上部分：反映各物质生产部门总产品中可供社会最终消费使用的产品及最终产品使用情况.

左下部分：反映各物质生产部门新创造价值，也反映国民收入的初次分配构成.

右下部分：（本书暂不介绍）.

（二）基本平衡方程式

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}+y_1=x_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}+y_2=x_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}+y_n=x_n \end{cases}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+y_i=x_i \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

每个方程表明每一部门（生产部门）分配给各部门的产品加上最终产品等于总产品. 而对纵列表示的每一生产部门来讲，各部门对它提供的生产性消耗，即生产性投入加上该部门新创造价值等于总产品. 于是又有

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{n1}+z_1=x_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{n2}+z_2=x_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{nn}+z_n=x_n \end{cases}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}+z_j=x_j (j=1, 2, \cdots, n)$$

前者称产品分配平衡方程式，后者称消耗平衡方程式.

（三）直接消耗系数及完全消耗系数

要定量掌握各部门间相互联系，必须研究各部门间的直接消耗和完全消耗. 直接消耗指某部门的产品在生产过程中，直接对另一部门产品的消耗，例如炼钢过程中的电力消耗，就是钢铁部门对电力部门的直接消耗.

定义：直接消耗系数指某部门所直接消耗的其他部门的产品价值与该（某）部门总产品价值的比值. 如

$$a_{ij}=x_{ij}/x_j (i=1, 2, \cdots, n; \ j=1, 2, \cdots, n)$$

即第 j 部门（如钢铁部门）生产单位产品，消耗第 i 部门（如电力部门）的产品数量.

直接消耗系数矩阵：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，为 $n\times n$ 矩阵.

当然，各物质生产部门之间除存在直接消耗关系外，还存在间接消耗. 如炼钢过程中除消耗电力（是钢对电力的直接消耗），还要消耗铁、焦炭、冶金设备等，而炼铁、炼焦炭和制造冶金设备也要消耗电力，是钢对电力的一次间接消耗. 继续分析下去，还可以找出钢对电力的二次、三次等多次间接消耗. 显然，要掌握部门间相互联系，必须研究总消耗，即完全消耗.

$b_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为完全消耗系数，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，为 $n\times n$ 矩阵. 表示第 j 部门生产单位产品对第 i 部门产品的完全消耗量. 一般

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-I$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 称为系数矩阵（里昂惕夫逆矩阵）.

（四）投入产出模型的基本形式

1. 国民经济各部门总产品与最终产品之间数量关系模型

将 $a_{ij}=x_{ij}/x_j$，$x_{ij}=a_{ij}x_j$ 代入 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i=x_i$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j+y_i=x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+y_1=x_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+y_2=x_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+y_n=x_n\end{cases}$$

简记为

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$$

移项整理为

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

上式即为国民经济各部门总产品与最终产品之间数量关系模型.

2. 国民经济各部门净产值与总产值之间数量关系模型

将 $x_{ij}=a_{ij}x_j$ 代入消耗平衡方程式 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i=x_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j+z_j=x_j\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或记为

$$x_j\sum_{i=1}^{n}a_{ij}+z_j=x_j\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

详细列出方程组

$$\begin{cases}x_1\sum a_{i1}\qquad\qquad +z_1=x_1\\ \qquad x_2\sum a_{i2}\qquad +z_2=x_2\\ \qquad\qquad\ddots\\ \qquad\qquad\qquad x_n\sum a_{in}+z_n=x_n\end{cases}$$

或记为

$$\begin{bmatrix} \sum a_{i1} & & & \\ & \sum a_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum a_{in} \end{bmatrix} \cdot X + Z = X .$$

记为

$$DX+Z=X$$
$$Z=(I-D)X$$

上式为国民经济各部门净产值与总产值之间数量关系模型.

3. 完全消耗系数模型

设完全消耗系数 $b_{ij}(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n)$ 表示生产 j 部门单位产品所需完全消耗 i 部门产品的数量，k 为生产中间产品的部门；b_{ik} 为生产 k 部门单位产品需要消耗 i 部门产品的数量；a_{kj} 为生产 j 部门单位产品需要消耗 k 部门产品的数量. 则 $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ 便是全部间接消耗.

所以，完全消耗系数 $b_{ij}=a_{kj}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ 若写成矩阵形式，为

$$B=A+BA$$

其中 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为完全消耗系数矩阵. 由于 $B-BA=A$，即 $B(I-A)=A$，两边各乘$(I-A)^{-1}$，得

$$B=A(I-A)^{-1}$$

再以 $A=I-I+A$ 代入上式，便有

$$B=(I-I+A)(I-A)^{-1}$$
$$B=(I-A)^{-1}-I$$

这便是计算完全消耗系数的公式. 所以算得直接消耗系数后，代入此式，便可算出完全消耗系数.

将上式写为$(I-A)^{-1}=B+I$，并代入 $X=(I-A)^{-1}Y$，则 $X=(B+I)Y$

此式说明，在 Y 已知，完全消耗系数已算出的情况下，也可以算出各部门的总产量 X.

二、国民经济投入产出预测

（一）小结

将上面讨论内容，汇总整理为如下四个部分，以供预测分析时使用.

1. 投入产出表的四个部分

（1）左上部分：反映国民经济物质生产各部门之间生产与分配产系，即投入与产出关系.

（2）右上部分：反映各物质生产部门总产品中可供社会最终消费使用的产品及最终产品使用情况.

（3）左下部分：反映各物质生产部门创造价值，也反映国民收入的初次分配构成.

2. 基本平衡方程

$$AX+Y=X$$

产品分配平衡方程式

$$DX+Z=X$$

3. 消耗平衡方程式

直接消耗系数，即第 j 部门生产单位产品消耗第 i 部门产品数量，即

$$a_{ij}=x_{ij}/x_j \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

完全消耗系数 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}$，即 j 部门生产单位产品对第 i 部门产品的完全消耗量.

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{Y}$$

4. 投入产出模型基本形式

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}$$

即国民经济各部门总产品与最终产品（不含消耗）之间数量关系模型.

$$\boldsymbol{DX}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}$$

上式为国民经济各部门的资产值与总产值之间数量关系模型.

（二）投入产出分析预测

1. 国民经济最终产品预测

已知各部门生产计划 $\boldsymbol{X}$，用 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 预测国民经济最终产品.

例 1 为方便讨论，假设国民经济分重、轻、农三个部门，1990 年各部门投入产出如表 5-2 所示. 设 1992 年重、轻、农的生产计划分别为 110 亿元、80 亿元、50 亿元时，这三个部门的最终产品将为多少？

表 5-2 投入产出表

单位：亿元

		生产部门				最终产品	总产值
		重工业	轻工业	农业	合计		
生产部门	重工业	30	20	10	60	40	100
	轻工业	20	5	6	31	29	60
	农业	15	10	4	29	6	35
	合计	65	35	20	120	75	195
国民收入	劳动报酬（V）	25	19	10	54		
	社会纯收入(M)	10	6	5	21		
	总产值	100	60	35	195		

经计算
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.333 & 0.286\\ 0.2 & 0.083 & 0.171\\ 0.15 & 0.167 & 0.114\end{bmatrix}$$

$$I-A=\begin{bmatrix}0.700 & -0.333 & -0.286\\ -0.20 & 0.917 & -0.171\\ -0.15 & -0.167 & 0.886\end{bmatrix}$$

计划 1992 年 $X=\begin{pmatrix}110\\80\\50\end{pmatrix}$，代入公式

$$Y=(I-A)X=(I-A)\begin{bmatrix}110\\80\\50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36.36\\42.81\\14.44\end{bmatrix}$$

2. 各部门生产规模预测

预测公式用 $X=(I-A)^{-1}Y$.

例 2 1990 年部门投入产出表如表 5-2 所示.

由
$$A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.333 & 0.286\\ 0.2 & 0.083 & 0.171\\ 0.15 & 0.167 & 0.114\end{bmatrix}$$

得
$$I-A=\begin{bmatrix}0.7 & -0.333 & -0.286\\ -0.2 & 0.917 & -0.171\\ -0.15 & -0.167 & 0.886\end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1.771 & 0.793 & 0.736\\ 0.469 & 1.335 & 0.409\\ 0.395 & 0.386 & 1.331\end{bmatrix}$$

当 $Y=\begin{bmatrix}38\\35\\10\end{bmatrix}$ 时

$$X=(I-A)^{-1}Y=\begin{bmatrix}1.771 & 0.793 & 0.736\\ 0.469 & 1.335 & 0.409\\ 0.395 & 0.386 & 1.331\end{bmatrix}\begin{bmatrix}38\\35\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}108.733\\69.337\\41.830\end{bmatrix}$$

为 1991 年三个部门的生产规模（1991 年底三部门的最终产品是 38，35，10）.

3. 国民收入预测（仍以例 2 为例）

$$D=\begin{bmatrix}\sum a_{i1} & & \\ & \sum a_{i2} & \\ & & \sum a_{i3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3+0.2+0.15 & & \\ & 0.333+0.83+0.167 & \\ & & 0.286+0.171+0.114\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.65 & & \\ & 0.583 & \\ & & 0.565\end{bmatrix}$$

$$I-D=\begin{bmatrix}0.35 & & \\ & 0.417 & \\ & & 0.435\end{bmatrix}$$

由
$$Z=(I-D)X=\begin{bmatrix}0.35 & & \\ & 0.417 & \\ & & 0.435\end{bmatrix}\begin{bmatrix}108.733\\69.337\\41.830\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38.057\\28.775\\18.196\end{bmatrix}$$

从而由 1991 年的生产规模得到 1991 年的国民收入

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2+\boldsymbol{Z}_3=38.057+28.775+18.196=85.028\text{（亿元）}$$

4. 国民经济部门结构调整预测

上例假定所反映的经济结构不合理，需对各部门比重进行调整，调整期为三年，在调整期内，轻工产品最终产品递增速度 10%，农业 6%，重工业 4%，试预测经三年调整到 1993 年，三大产业产值为多少？

解：

$$y_1(2)=40\times(1+0.04)^3=44.995$$
$$y_2(2)=29\times(1+0.10)^3=38.599$$
$$y_3(2)=6\times(1+0.06)^3=7.146$$

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1.771 & 0.793 & 0.738\\0.469 & 1.335 & 0.409\\0.395 & 0.386 & 1.331\end{bmatrix}\begin{bmatrix}44.995\\38.599\\7.146\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}115.568\\75.555\\42.184\end{bmatrix}$$

此即 1993 年三大产业部门的产值.

5. 劳动报酬和劳动力需求预测

在各部门总产值已确定或已知情况下，可通过投入产出表预测各部门劳动报酬. 进而如果已知计划期平均每年劳动力单位劳动报酬则可预测劳动力需求量.

定义：第 j 部门的生产单位产品（ 产值 ）的劳动报酬为第 j 部门的劳动报酬系数 a_{vj} .

$$a_{vj}=V_j/x_j$$
$$V_j=a_{vj}x_j$$

定义：S_{vj} 为第 j 部门平均每年每劳动力的劳动报酬，以 L_j 表示第 j 部门的劳动力需求量，则

$$L_j=V_j/S_{vj}$$
$$V_j=S_{vj}L_j$$

利用例 1 资料可得

$$a_{v1}=v_1/x_1=25/100=0.25$$
$$a_{v2}=v_2/x_2=19/60=0.317$$
$$a_{v3}=v_3/x_3=10/35=0.286$$

仍设农、轻、重在计划期总产值分别为 110 亿、80 亿、50 亿，则对应劳动报酬为

$$V_1=a_{v1}x_1^*=0.25\times110=27.5\text{（亿元）}$$
$$V_2=a_{v2}x_2^*=0.317\times80=25.36\text{（亿元）}$$
$$V_3=a_{v3}x_3^*=0.286\times50=14.30\text{（亿元）}$$

又设计划期三个部门的年平均劳动报酬分别为 3000 元、2500 元、1000 元，则重、轻、农在计划期的劳动力需求量为

$$L_1=V_1/S_{v1}=\frac{27.5\times10^8}{3000}=912\text{（万人）}$$

$$L_2=V_2/S_{v2}=\frac{25.36\times10^8}{2500}=1014\text{（万人）}$$

$$L_3 = V_3 / S_{v3} = \frac{14.30\times 10^8}{1000} = 1430\text{（万人）}$$

通过以上的介绍，可以看到，数学模型的构造、理论上的讨论、方法的运算步骤，都没有超出矩阵及其代数运算的范围.

第五节　综合应用

一、在量子力学中的应用

量子力学是物理学的一门重要的基础理论课程，也是物理学工作者从事现代物理学研究不可缺少的基本知识和基本训练. 它的应用范围非常广泛，在固体物理、介观物理、原子分子物理、表面物理、原子核物理、天体物理，甚至化学、生物学等各个领域中都有许多精彩的应用.

19 世纪末 20 世纪初，经典物理学，主要是经典力学、热力学和经典统计物理学、经典电动力学，已经发展得相当完善. 比方说，速度远小于光速的物体的机械运动遵从牛顿力学规律；电磁现象满足麦克斯韦方程组；光的现象满足光的波动理论；特别是当时已认识到热辐射和光辐射都是电磁波，还提出了热辐射满足的基尔霍夫（Kirchhoff）定律和斯忒藩（Stefan）-玻尔兹曼（Boltzmann）定律，证实黑体辐射的能量密度与温度的四次方成正比. 对于热现象，除了已经有了非常系统的热力学理论外，还有玻尔兹曼、吉布斯（Gibbs）等人提出的统计物理学. 经典物理学的大厦已经建立得相当完美了.

但是，在和实验进一步对比的过程中，也出现了一些困难，在经典物理的范畴内是无法解释黑体辐射、光电效应、原子光谱、原子稳定性、固体比热、束缚态电子比热、振动比热等问题，而引入量子化假设$\varepsilon = h\nu$及玻尔模型后，可以化解经典物理学的困难，式中ε为量子能量，ν为频率，h为普朗克常量，每个量子的能量与频率成正比.

量子力学的研究中，矩阵力学是基础. 物理学家将力学量看成算符. 通过将经典力学运动方程中的坐标和动量都当作算符的方法，引入r和p的对易关系，将经典的泊松括号改为量子的泊松括号，实现量子化. 这种量子化，通常称为正则量子化. 在选定了一定的“坐标系”或称表象后. 算符用矩阵表示，算符的运算归结为矩阵的运算.

量子力学中的所有公式都可以用矩阵表述，从而构成矩阵力学.

在量子力学中，有重要作用的“本征值方程”，就是线性代数中的矩阵的特征方程的应用.算符$\hat{F}\left(x,\ \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$的本征值方程为

$$\hat{F}\left(x,\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,\ t) = \lambda\psi(x,\ t) \tag{5.15}$$

其中λ为本特征值.将$\hat{F}$及Ψ在$\hat{Q}$表象中表示出来，可得出（5.15）式的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} & \cdots \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

式（5.16）可改写成

$$\sum_n F_{mn}a_n = \lambda a_m \tag{5.17}$$

或

$$\begin{bmatrix} F_{11}-\lambda & F_{12} & \cdots & F_{1n} & \cdots \\ F_{21} & F_{22}-\lambda & \cdots & F_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn}-\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \tag{5.18}$$

方程（5.18）式是一个齐次线性方程组

$$\sum_n (F_{mn}-\lambda\delta_{mn})a_n = 0 \quad (m=1,\ 2,\ \cdots n,\ \cdots) \tag{5.19}$$

这个方程组具有非零解的条件是它的系数行列式为零，即

$$\det\left|F_{mn}-\lambda\delta_{mn}\right| \equiv \begin{vmatrix} F_{11}-\lambda & F_{12} & \cdots & F_{1n} & \cdots \\ F_{21} & F_{22}-\lambda & \cdots & F_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn}-\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{5.20}$$

（5.20）式称为久期方程. 解久期方程得到一组 λ 的值：λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，$\cdots$，它们就是算符 $\hat{F}$ 的本征值. 以求得的本征值 λ_i 代入（5.18）式，解出一组对应的本征函数 $\{a_{i1}(t), a_{i2}(t), \cdots, a_{in}(t), \cdots\}(i=1, 2, \cdots, n,\ \cdots)$，进行归一化后，就得出了 $\hat{F}$ 的本征值和本征函数.

于是，矩阵力学提供了另外一种求本征值和本征函数的方法. 它将求本征值的问题归结为求久期方程的根. 在波动力学中，求本征值和本征函数的问题，归结为在初始条件和边界条件下求解微分方程，在矩阵力学中，求本征值和本征函数的问题，简化为求解线性齐次的代数方程组（5.19）.

上面的叙述中，如抽象掉算符的内在含义，视其为一矩阵，其讨论又与线性代数中的特征值、特征方程的叙述没有什么本质上的区别.

二、在化学计量学中的应用

化学是自然科学的一个重要分支，应用极其广泛.其中，化学计量学的发展历史、研究内容和应用领域，有突显数学、统计学的重要应用.

化学计量学是以数学和统计学为基础发展起来的，各种化学计量学方法中大量使用数学和统计学知识，如线性代数、概率论、矩阵理论、数理统计、最优化方法、图论等，用得最多、也最为基础的就是线性代数和统计学知识. 在化学计量学中，需要把化学信息用适当的形式表达出来，以便于计算.

化学计量学中很多种类的数据可以用矢量和矩阵表示，如一组标准溶液中某一组分的浓度值组成一个矢量（有一系列标准浓度组成），而如果把标准系列中某几个组分的浓度值组合在一起就组成了一个浓度矩阵. 在化学计量学中，数据处理的形式多种多样，但一般尽量把数据组合在一起，用矢量或矩阵，甚至是张量来表示，这样做可以简化数学处理过程，也容易理解、记忆和表达.

（一）众所周知，20 世纪 50 年代以后，仪器分析方法迅速崛起，各类分析仪器所能提供的数据容量迅速增加. 一般的化学分析方法，一次实验往往只能得到有限的几个数据，如滴定分析的实验数据无非是消耗滴定剂体积，重量分析中沉淀物的重量等. 而仪器分析方法的一个实验往往可以得到一组数据，如一个色谱图、一个极谱图、一个光谱图等，他们都包含一系列数据. 化学计量学针对这样的数据，提出了一些方法能从中获取更多的有用信息，为分析化学展现了一个非常独特的美好前景.

例如利用多个光谱点可以进行多组分同时测定. 设一个光谱包含 n 个波长点 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$，如果样品中含有 m 个组分，则可以从 n 个波长中选择 m 个（假设 $n>m$，一般情况下都能满足这个条件），按 Beer 定律列出方程组，

$$\begin{cases} A_1 = k_{11}c_1 + k_{12}c_2 + \cdots + k_{1m}c_m \\ A_2 = k_{21}c_1 + k_{22}c_2 + \cdots + k_{2m}c_m \\ \quad \cdots \\ A_m = k_{m1}c_1 + k_{m2}c_2 + \cdots + k_{mm}c_m \end{cases}$$

式中，A_i 为对应波长下样品的吸光度：为第 1 到第 m 个组分的浓度；k_{ij} 是第 j 个组分在第 i 个波长下的吸光系数，为常数. 很显然，如果利用各个组分的标准溶液测定它们在各个波长下的吸光系数 k_{ij}，并测定未知混合样品的吸光度，通过解上述方程组，很容易计算出 m 个组分的浓度. 这种分析方法，在吸光系数已知的情况下，对未知样品进行一次测量，就可以进行多组分含量的同时测定，显然测试效率得到了提高. 不过，该方法不能保证每个组分都是在最佳条件下（如最大吸收波长下）进行测定，而且波长的选择也是要考虑的问题. 上述方法只是最简单的多组分同时测定方法，实际上化学计量学方法利用全部波长的数据，用最小二乘法来计算各组分含量，准确度更高. 这里，我们再一次看到类似于线性方程组 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{kC}$ 的表述形式.

（二）化学的定量分析中，多元校正是一种重要方法，在实践中应用非常广泛.

$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{XC}+\boldsymbol{e}$，在光谱分析中称为多元校正模型. 式中 $\boldsymbol{Y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 表示混合物的吸光度量测矢量，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_p)$ 为吸光系数矢量，其中 $\boldsymbol{X}_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}=(c_1, c_2, \cdots, c_p)^{\mathrm{T}}$ 为浓度矢量，$\boldsymbol{e}$ 为量测误差矢量.

利用最小二乘法，并将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{XC}$ 两边左乘 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，得到 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XC}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$，由线性代数理论，$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}$ 存在，以其左乘上式两边得到 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XC}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Y}$，即得到浓度的估计量 $\hat{\boldsymbol{C}}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Y}$. 上式，即是多元线性回归的计算公式，在化学计量学中常采用 MATLAB 应用软件，只需一个语句 $C=inv(X'*X)X'*Y$ 就可以计算出浓度矢量各个分值.

可见，线性代数的一个简单矩阵运算，解决了化学的定量分析问题，获取了大量的有用信息.

（三）主成分分析是化学计量学中非常重要的一个方法，解决了很多传统化学方法无法解决的难题.

其中，多维变量的主成分分析是线性代数中矩阵运算、正交矩阵、矩阵特征值和特征向量、向量的范数等各种知识的综合运用. 计算主成分的问题，化解为求矩阵 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 的特征值问题. 因此，只要求出 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 矩阵的所有特征值和特征向量，就求得了所有的主成分. 对于特征值为 λ_i 的特征向量 u_i，用公式 $y_i=\boldsymbol{X}u_i$，可以计算第 i 个主成分. 将所有特征向量组合在一起得到特征向量矩阵 $\boldsymbol{U}=[u_1, u_2, \cdots, u_n]$，于是，所有主成分可以用下式计算，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}&=[y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n]\\&=[\boldsymbol{X}u_1,\ \boldsymbol{X}u_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}u_n]\\&=\boldsymbol{XU}\end{aligned}$$

主成分是y_1，y_2，$\cdots$，y_n两两正交的，特征向量u_1，u_2，$\cdots$，u_n也是两两正交的. 而计算主成分的关键步骤，就是计算矩阵的特征值和特征向量. 由于这部分内容的讨论涉及太多的化学方面的专业知识，不再作具体的介绍.

第五章自测题

一、选择题

1．设二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&0&0\\3&0&-1\end{bmatrix}$$

则，这个二次型是（　　）.

A．$x_1{}^2-x_1x_2+3x_1x_2-x_3{}^2$　　B．$x_1{}^2-2x_1x_2+6x_1x_3-x_3{}^2$

C．$2x_1{}^2-2x_1x_2+6x_1x_2-2x_3{}^2$　　D．$-x_1{}^2+2x_1x_2-6x_1x_2+2x_3{}^2$

2．设$\boldsymbol{A}$为二阶实对称矩阵，且|$\boldsymbol{A}$|=6，若$\boldsymbol{A}$有一个特征值$\lambda_1=2$，则$\boldsymbol{A}$的另一个特征值λ_2是（　　）.

A．−3　　B．−2　　C．−1　　D．1

3．二阶方阵$\begin{bmatrix}1&a\\a&2\end{bmatrix}$为正定矩阵的充分必要条件是（　　）.

A．$1<a<2$　　B．$a>-\sqrt{2}$

C．$a>\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

二、解答题

1．用矩阵记号表示下列二次型

（1）$f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$；

（2）$f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$；

（3）$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

2．求化二次型$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$为标准形的正交变换.

3．判别下列二次型的正定性

（1）$f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

（2）$f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_3-12x_2x_4$；

（3）$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

4．已知二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_1x_3$，求正交矩阵$\boldsymbol{T}$，使作变换$\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{TZ}$后，$f$成为标准型，其中$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Z}=(z_1,\ z_2,\ z_3)^{\mathrm{T}}$.

5．已知$f=t(x^2+y^2+z^2)+2xy-2yz+2zx+w^2$，问$t$为何值时，二次型$f$是正定的？又$t$为何值时，二次型$f$是正定的？

习 题 解 答

第一章 行列式

习题 1.1

1.（1）$t=4$，偶排列.

（2）当 $n=4k$ 及 $n=4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 及 $n=4k+3$ 时，为奇排列. 其中 k 为非负整数.

（3）当 $n=4k$ 及 $n=4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 及 $n=4k+3$ 时，为奇排列. 其中 k 为非负整数.

（4）当 $n=4k$ 及 $n=4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 及 $n=4k+3$ 时，为奇排列. 其中 k 为非负整数.

2.（1） $i=5$，$j=8$； （2） $i=8$，$j=1$.

3.（1）证：由行列式定义知，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$，其中 $\sum$ 是对 $n!$ 项求和.

∵ 当 $p_i > 1$ 时，$a_{ip_i} = 0 (i=1, 2, \cdots, n-1)$.

∴ 在 $\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$，且项前符号为正号. 这就证明了

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（2）证：把 n 阶行列式定义写成 $D_n = \sum (-1)^s a_{q1}1 a_{q2}2 \cdots a_{qi}i \cdots a_{qn}n$，其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是行标的一个排列，s 是这个排列的逆序数. 因为在第 n 列元素中除 a_{1n} 外其余全为 0，在第 $n-1$ 列元素中，当 $q_i>2$ 时全为 0，而每一项中 n 个元素取自不同行，不同列. 这样 D_n 中就只有一项 $a_{n1}a_{n-1,\,2}\cdots a_{2,\,n-1}a_{1n} \neq 0$，这项前面的符号是 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1}a_{n-1,\,2}\cdots a_{2,\,n-1}a_{1n}.$$

4．（1）$a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$ 包含在五阶行列式中，行标排列的逆序数为 $s=1+1+3+0=5$，列标排列的逆序数为 $t=1+0+2+1=4$．所以，这项的符号为 $(-1)^{5+4}=(-1)^9=-1$，即这项前面带负号；

（2）$a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$ 包含在七阶行列式中，行标排列的逆序数为 $s=1+0+2+1+1+3=8$，列标排列的逆序数为 $t=0+2+0+2+5+3=12$．所以，这项的符号为 $(-1)^{8+12}=(-1)^{20}=1$， 即这项前面带正号.

5．含 x^4 的项是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$，含 x^3 的项是 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=2x^3$ 及 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$.

6．由行列式定义 $\boldsymbol{D}_5=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$ 可知，在 p_3，p_4，p_5 中至少有一个大于或等于 3，对应的 a_{3p_3}，a_{4p_4}，a_{5p_5} 中至少有一个为 0，因此总有 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}=0$，则 $D_5=0$.

习题 1.2

1．（1）2000；（2）160；（3）0；（4）$-(-1)^{\frac{4\times3}{2}}5\times\left(-\frac{ae}{5}\right)bd=abde.$

2．$\boldsymbol{D}_5=0$.

3．$(a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

4．$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$；$-a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54}$.

习题 1.3

1．（1）$(a-1)(a-3)^2$；（2）$4abcdef$；（3）432；（4）0.

2．$x=\dfrac{12}{5}$.

3．（1）a^n-a^{n-2}；（2）$[a+(n-1)b]\cdot(a-b)^{n-1}$；（3）$\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n$. [提示：第 i 列乘 $-\dfrac{1}{a_{i-1}}$ 加到第一列上，$i=2$，3，…，$n+1$]

习题 1.4

1．$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=-1$，$x_4=2$.

2．当 $\lambda=0$，2，3 时，$\boldsymbol{D}=0$，这时齐次线性方程组有非零解；当 $\lambda\neq0$，2，3，$\boldsymbol{D}\neq0$，这时方程组只有零解.

3． $x=\dfrac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\dfrac{1}{4}(-a+b+c+d)$， $y=\dfrac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\dfrac{1}{4}(a-b+c+d)$， $z=\dfrac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}=\dfrac{1}{4}(a+b-c+d)$， $t=\dfrac{\boldsymbol{D}_4}{\boldsymbol{D}}=\dfrac{1}{4}(a+b+c-d)$.

第一章自测题

一、单项选择题

1．B；2．B；3．A；4．A；5．A；6．D；7．C；8．B；9．A；10．D.

二、判断题

1．×；2．√；3．×；4．√.

三、解答题

1．（1）$t=6$；（2）$t=8$；（3）$t=\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

2．（1）1；（2）$x^3+y^3+z^3-3xyz$；（3）0；（4）$(a-3)[(a-3)^3-4(a-3)]$.

3．证：$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} x & ay+bz & bx \\ y & az+bx & by \\ z & ax+by & bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az \\ z & az+bx & ax \\ x & ax+by & ay \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & bx \\ z & az+bx & by \\ x & ax+by & bz \end{vmatrix}$

$=a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix} x & bz & z \\ y & bx & x \\ z & by & y \end{vmatrix}+0+0+b^2\begin{vmatrix} y & ay & x \\ z & az & y \\ x & ax & z \end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix} y & bz & x \\ z & bx & y \\ x & by & z \end{vmatrix}$

$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+0+0+0+0+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

4．（1）$[x-(n-1)a](x-a)^{n-1}$；（2）a^n-a^{n-2}.

5．将$F(x)$按第一列展开，可知$F(x)$的各项中x的最高次幂是x^{n-1}，且其系数是$n-1$阶范德蒙行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$，由于$a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$是互不相同的数，这个行列式不等于零，所以$F(x)$是$n-1$次多项式．当$x$分别取$a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$时，$F(x)$=0，因此$a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$是$F(x)=0$的根，而$F(x)=0$是$n-1$次方程，最多有$n-1$个根．所以，$a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$是方程$F(x)=0$的全部根.

6．解：因为

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=665\ (\neq 0),\qquad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-665,$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=665,\qquad \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-665,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&-2&0\\0&1&5&2&0\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&-4&5\end{vmatrix}=665\,,\qquad D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&-2\\0&1&5&6&2\\0&0&1&5&-2\\0&0&0&1&-4\end{vmatrix}=-665\,.$$

所以 $x_1=-1$， $x_2=1$， $x_3=-1$， $x_4=1$，$x_5=-1$.

7．证：因为行列式的某行元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和为零，在 D_4 中，第二行元素与第四行对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$.

8．解：$\because D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\0&\mu&0\end{vmatrix}=\mu(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&1\end{vmatrix}=-\mu(\lambda-1)$

$\therefore$ 当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时，$D=0$．这时方程组有非零解.

第二章　矩 阵

习题 2.1

1．$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$.

2．$\begin{bmatrix}9&-7&-4\\-7&6&3\\-4&3&2\end{bmatrix}$.

3．$\begin{cases}y_1=\lambda_1x_1\\y_2=\lambda_2x_2\\\cdots\\y_n=\lambda_nx_n\end{cases}$.

4．$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1\\y_2=a_{21}x_2\\\cdots\\y_m=a_{m1}x_m\end{cases}$.

习题 2.2

1．$3AB-2A=\begin{bmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{bmatrix}$，$A^{\mathrm{T}}B=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}$.

2．（1）$\begin{bmatrix}35\\6\\49\end{bmatrix}$；（2）10；（3）$\begin{bmatrix}-2&4\\-1&2\\-3&6\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$.

3．（1）$AB=\begin{bmatrix}3&4\\4&6\end{bmatrix}$， $BA=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}$，$\therefore AB\neq BA$.

（2）$(A+B)^2=\begin{bmatrix}8&14\\14&29\end{bmatrix}$， $A^2+2AB+B^2=\begin{bmatrix}10&16\\15&27\end{bmatrix}$，$\therefore$ $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

（3）$(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}0&6\\0&9\end{bmatrix}$，$A^2-B^2=\begin{bmatrix}2&8\\1&7\end{bmatrix}$，$\therefore$ $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

4．（1）如 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$ 但 $A\neq 0$.

（2）如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=A$，但 $A\neq 0$， $A\neq E$.

（3） $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$， 则 $AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=AY$ ，且 $A\neq \mathbf{0}$ ，但 $X\neq Y$.

5． $AB=\begin{bmatrix}a_1b_1&&&\\&a_2b_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_nb_n\end{bmatrix}$.

6． $A^2=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$； $A^3=\begin{bmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$ ；由归纳法知，

$$A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}.$$

7．证：用归纳法证明.

（1） $n=1$ 时， $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ ，命题成立.

（2）设 $n=k-1$ 时，命题成立，即

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^{k-1}=\begin{bmatrix}\cos(k-1)\theta&-\sin(k-1)\theta\\\sin(k-1)\theta&\cos(k-1)\theta\end{bmatrix}$$

（3）证明当 $n=k$ 时，命题成立.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^{k}=\begin{bmatrix}\cos(k-1)\theta&-\sin(k-1)\theta\\\sin(k-1)\theta&\cos(k-1)\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\cos(k-1)\theta-\sin\theta\sin(k-1)\theta&-\cos\theta\sin(k-1)\theta-\sin\theta\cos(k-1)\theta\\\cos\theta\sin(k-1)\theta+\sin\theta\cos(k-1)\theta&\cos\theta\cos(k-1)\theta-\sin\theta\sin(k-1)\theta\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}\cos k\theta&-\sin k\theta\\\sin k\theta&\cos k\theta\end{bmatrix}$，所以命题成立.

8．证：∵ $A^{\mathrm{T}}=A$，又 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=((B^{\mathrm{T}}A)B)=B^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}A)=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}AB$

∴ $B^{\mathrm{T}}AB$ 为对称矩阵.

9．设与矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵为矩阵 B，即 $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}B=B\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 B 为二行二列的矩阵. 可设 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$，因此，所得矩阵 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\0&b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}$，其中：$a=b_{11}$，$b=b_{12}$，（$a$，$b$ 为任意常数）.

10．证：（1）∵ $(A+A^{\mathrm{T}})=A^{\mathrm{T}}+(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A+A^{\mathrm{T}}$，∴ $A+A^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵. 又 $(A-A^{\mathrm{T}})=A^{\mathrm{T}}-(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}-A=-(A-A^{\mathrm{T}})$，∴ $A-A^{\mathrm{T}}$ 为反对称矩阵.

（2）设 A 为任意的 n 阶矩阵，则 $A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$. 证毕.

11. $A_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$，$B_{n\times s}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}$，

$Z_{m\times1}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_m\end{bmatrix}$，$Y_{n\times1}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$，$X_{s\times1}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}$.

已给线性变换的矩阵表示如下：$Z_{m\times1}=A_{m\times n}Y_{n\times1}$，$Y_{n\times1}=B_{n\times s}X_{s\times1}$，则 $Z_{m\times1}=A_{m\times n}(B_{n\times s}X_{s\times1})=(A_{m\times n}B_{n\times s})X_{s\times1}$，不妨假设，$C_{m\times s}=A_{m\times n}B_{n\times s}=(c_{ij})_{m\times s}$ 其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,s)$，由上所述，所求线性变换的矩阵形式为 $Z_{m\times1}=C_{m\times s}X_{s\times1}$.

习题 2.3

1．（1）$\begin{bmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&2&-2&4\\0&1&3&-1\\0&0&15&9\end{bmatrix}$.

2．（1）$\begin{bmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2/3&2/3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

习题 2.4

1．（1）$\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$；（3）$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-\frac{13}{2}&3&-\frac{1}{2}\\-16&7&-1\end{bmatrix}$；

（4）$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，$|A|=a_1a_2\cdots a_n\neq 0$. $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&&&\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{a_n}\end{bmatrix}$.

2．（1）$X=\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}$；

（2）$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{bmatrix}$.

3．（1）$\begin{cases}x_1=5\\x_2=0\\x_3=3\end{cases}$.

（2）$\because \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，则其逆变换为$\begin{cases}x_1=-y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_3,\\x_3=-y_2+2y_3.\end{cases}$

4．证：$\because A^2-A-2E=0$，即 $A(A-E)=2E$.

$\therefore A\left[\frac{1}{2}(A-E)\right]=E$，则 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又 $A^2=A+2E$，则 $(A^{-1})^2=A^{-2}=(A^2)^{-1}$，即 A^2 可逆，所以 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\left[\frac{1}{2}(A-E)\right]^2=\frac{1}{4}(A^2-2A+E)=\frac{1}{4}(A+2E-2A+E)=\frac{1}{4}(3E-A)$.

5．$\because (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=\Lambda^2$，即 $P^{-1}A^2P=\Lambda^2$

又 $\because (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP)=\Lambda^3$，即 $P^{-1}A^3P=\Lambda^3$

由此可知，$P^{-1}A^{11}P=\Lambda^{11}$，则 $A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$

而 $\Lambda^{11}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}^{11}=\begin{bmatrix}(-1)^{11}&0\\0&2^{11}\end{bmatrix}$,

又 $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-4\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

$$\therefore \quad A^{11}=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-4\times 2^{11}\\-1&2^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{bmatrix}$$

6．证：

（1）由条件$|A|=0$，可知$A=0$或$A\neq 0$.

（i）若$A=0$，显然$A^*=0$，则$|A^*|=0$.

（ii）若$A\neq 0$，假设$|A^*|\neq 0$，则$(A^*)^{-1}$存在.

$\because AA^*=|A|E=0$，即$AA^*=0$，

$\therefore AA^*(A^*)^{-1}=AE=0$，则$A=0$，矛盾.

（2）$\because AA^*=|A|E \therefore |AA^*|=||A|E|=|A|^n$，即$|A||A^*|=|A|^n$.

（i）若$|A|\neq 0$，则$|A^*|=|A|^{n-1}$.

（ii）当$|A|=0$时，由（1）可知$|A^*|=0$，显然此时有$|A^*|=|A|^{n-1}$.

综上所述知，$|A^*|=|A|^{n-1}$.

7．证：$|A^*|=|A|^{n-1}$，当A可逆时，$|A^*|\neq 0$，所以$|A^*|\neq 0$，故A^*可逆，即$(A^*)^{-1}$存在.

又$A^*A=|A|E$，　$A^*\left(\frac{1}{|A|}A\right)=E$，$\therefore (A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

又$(A^{-1})(A^{-1})^*=|A^{-1}|E$，　$(A^{-1})\left(\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*\right)=E$

$\therefore A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*$，则$(A^{-1})^*=|A^{-1}|A=\frac{1}{|A|}A$，则$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

习题 2.5

1．（1）$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&8&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$R(A)=2$.

（2）$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_3}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_5-r_4}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，$R(A)=5$.

2．证：必要性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换后得到的矩阵，而矩阵经初等变换后其秩不变，因此，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

充分性：若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ ，不妨设 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$ ， $r\leqslant\min\{m, n\}$. 则

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{0}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{0}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$$

我们知初等变换是可逆的，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

第二章自测题

一、单项选择题

1．B；2．D；3．A；4．B；5．B；6．C；7．C；8．C；9．A；10．C；11．D；12．A；13．B；14．C；15．C；16．A

二、解答题

1．解：两个线性变换的矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-2&3&2\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-2&3&2\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2&1\\12&-4&9\\-10&-1&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

所求线性变换为 $\begin{cases}x_1=-4z_1+2z_2+z_3,\\x_2=12z_1-4z_2+9z_3,\\x_3=-10z_1-z_2+16z_3.\end{cases}$

2．（1）解：

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}$$ ，故 $R(\boldsymbol{A})=3$.

（2）解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&2\\1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ ，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&3&2\\0&2&2&1&0\\1&-1&0&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&3&2\\0&1&1&\frac{1}{2}&0\\0&-2&1&-5&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right],$$

所以，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{11}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

（3）解：$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-\lambda r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 1 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{5}r_3\leftrightarrow r_2 \\ -\frac{1}{3}r_4}}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2 \\ r_3+\frac{7}{4}r_2}}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5\lambda & -\frac{5}{4}\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda=0$ 时矩阵的秩最小，$R(\boldsymbol{A})=2$.

3．解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}=(a_n)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{bmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$，又 $\boldsymbol{C}^{-1}=(a_n^{-1})$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}$.

$$\therefore \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. 证: $\because \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，$\therefore \boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{B}^3=(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{C})(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{C}$.
由归纳法易知，$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^m$（$m$ 为正整数).

5．证：$\because \boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$，$\therefore (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$.

6．解：

（1）$A^{\mathrm{T}}B=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$.

（2）$A^{\mathrm{T}}B\sim\begin{bmatrix}a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_1&a_2&\cdots&a_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&a_n&\cdots&a_n\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a_1&a_1&\cdots&a_1\\0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，$R(A^{\mathrm{T}}B)=1$.

第三章　线性方程组

习题 3.1

1．（1）对其增广矩阵施行初等行变换

$$\tilde{A}=(A\mid B)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&-2&1&1&5\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&0&4\end{array}\right].$$

因 $R(A)=2$，$R(\tilde{A})=3$，$R(A)\neq R(\tilde{A})$，所以方程组无解.

（2）对其增广矩阵施行初等行变换

$$\tilde{A}=(A\mid B)=\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&3\\3&1&-5&0\\4&-1&1&3\\1&3&-13&-6\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&3\\1&2&-8&-3\\1&-2&6&3\\1&3&-13&-6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3\leftrightarrow r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&6&3\\1&2&-8&-3\\2&-1&3&3\\0&1&-5&-3\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&6&3\\0&4&-14&-6\\0&3&-9&-3\\0&1&-5&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{r_3\times\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&6&3\\0&1&-3&-1\\0&4&-14&-6\\0&1&-5&-3\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_4-r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&6&3\\0&1&-3&-1\\0&0&-2&-2\\0&0&-2&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_3]{r_3\times\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&6&3\\0&1&-3&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right],\quad R(A)=R(\tilde{A})=3.$$

故方程组有解，且得同解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+6x_3=3\\ \qquad x_2-3x_3=-1\\ \qquad\qquad x_3=1\end{cases}，于是得方程组的解为\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=1\end{cases}.$$

2．（1）无解；（2）无解；（3）有无穷多个解.

习题 3.2

1．（16，12，7）.

2．（1，2，3，4）.

3．（1） $\boldsymbol{\beta}=-10\boldsymbol{\alpha}_1+13\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$；（2） $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+5\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

4．证：

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=0$，

$$\text{即}\begin{cases}k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_ma_{m1}=0\\ \cdots\\ k_1a_{1r}+k_2a_{2r}+\cdots+k_ma_{mr}=0\\ k_1a_{1,r+1}+k_2a_{2,r+1}+\cdots+k_ma_{m,r+1}=0\\ \cdots\\ k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_ma_{mn}=0\end{cases}\qquad(*)$$

由方程组(*)的前 r 个方程可知 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 又 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，从而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

5．证： $\because \boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4=\mathbf{0}$，$\therefore \boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

6．证：

（1）设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$，即 $(k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

$$\because \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\text{ 线性无关，}\therefore\begin{cases}k_1-k_2=0\\ k_2+k_3=0\\ k_1+k_3=0\end{cases}\qquad(*)$$

因为方程组（*）的系数行列式等于零，故方程组（*）有非零解. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

（2）设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$，即 $(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

$\because \boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\therefore \begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ \quad\ \ k_2+k_3=0\\ \qquad\quad k_3=0\end{cases}$，可知 $k_1=k_2=k_3=0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7．当 $k_1k_2k_3\neq-1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

8．（1）因 $|(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2)|=\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=7\neq0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

（2）因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 中含有零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

（3）因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 所含向量的个数 4 大于维数 3，故向量组线性相关.

（4）因为 $\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3&1\\1&2&-3\end{vmatrix}=-5\neq0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（5）因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\2&-3&4&5\\2&-5&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&1&2&3\\0&-1&-2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故

$R(\boldsymbol{A})=2<3$. 所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

9. 证：

必要性　设$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，且这种表示法唯一，假设$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则存在一组不全为零的数k_1', k_2', $\cdots$, k_m'，使得$k_1'\boldsymbol{\alpha}_1+k_2'\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m'\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{0}&=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)+(k_1'\boldsymbol{\alpha}_1+k_2'\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m'\boldsymbol{\alpha}_m)\\&=(k_1+k_1')\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_2')\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m+k_m')\boldsymbol{\alpha}_m.\end{aligned}$$

因为k_1', k_2', $\cdots$, k_m'不全为零，故k_1+k_1', k_2+k_2', $\cdots$, k_m+k_m'与数组k_1, k_2, $\cdots$, k_m不同，于是$\boldsymbol{\beta}$由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$表示的表示式不唯一. 这说明$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

充分性　类似于定理 2 的证明.

10. 证：

因为$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，所以存在一组不全为零的数k_1, k_2, k_3, k_4，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$. 假设$k_1$, k_2, k_3, k_4中有一个为零，比如$k_1=0$，则$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$. 因为$\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以$k_2=k_3=k_4=0$. 此与k_1, k_2, k_3, k_4不全为零矛盾！故$k_1\neq 0$. 类似可得$k_2\neq 0$, $k_3\neq 0$, $k_4\neq 0$.

习题 3.3

1. $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=4\gamma_1+4\gamma_2-17\gamma_3\\ \boldsymbol{\alpha}_2=23\gamma_2-7\gamma_3\end{cases}$.

2. 不一定，例如向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0, 0, 1, 0)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，但$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$不是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$的最大无关组.

3. (1) 显然$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，故$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$的一个最大无关组，向量组的秩为 2.

(2) 可以看出$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，而$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$的一个最大无关组. 向量组的秩为 3.

(3) $$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&3&1&-1\\2&1&5&2\\4&2&6&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&3&3&0\\0&1&1&0\\0&2&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2\times\frac{1}{3}\\r_4\times\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\r_4-r_2}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故$R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$为其最大无关组.

4. 证：

由已知，$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_s$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，又因为$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}_s-\boldsymbol{\beta}_{s-1}$，故$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_s$线性表示. 所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_s$有相同的秩.

5. 证：

因为向量组$\boldsymbol{T}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$的秩为r，故$\boldsymbol{T}$的任意$r+1$个向量均线性相关，所以$\boldsymbol{T}$中

任意 r 个线性无关的向量一定是 $\boldsymbol{T}$ 的一个最大无关组.

6．证：

已证: $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.于是,$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{C})=R(\boldsymbol{AB})$.

从而 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$. 类似可证 $R(\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{B})$.

习题 3.4

1．（1） $R(\boldsymbol{A})=2$ ， $R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$ ，无解；

（2） $R(\boldsymbol{A})=2$ ， $R(\tilde{\boldsymbol{A}})=4$ ，无解；

（3）通解 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}_0(k_1,\ k_2 \in R)$ ，

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta}_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（4）通解 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}_0(k_1,\ k_2 \in R)$ ，

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta}_0=\begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2．对方程组的增广矩阵施行初等行变换，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & \lambda-5 & \lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{(\lambda-1)(\lambda-10)}{2} & \frac{(\lambda-1)(\lambda-4)}{2} \end{array}\right]$$

（1）当 $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 10$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解；

（2）当 $\lambda=10$ 时， $R(\boldsymbol{A})=2,\ R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$ ，方程组无解；

（3）当 $\lambda=1$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})=1$，方程组有无穷多解.

此时通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*(k_1,\ k_2 \in R)$ ，

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}^*=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3．基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\4\\0\\5\\1\end{bmatrix}$，故原方程组通解为$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*(k_1,\ k_2\in R)$.

4．对系数矩阵施行初等行变换，

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&-2&3&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&4&-3\end{bmatrix}$，$R(\boldsymbol{A})=2$，故方程组的基础解系中含有两个向量. 已知$\boldsymbol{\eta}$ 是其一个解，故只要找到另一与$\boldsymbol{\eta}$ 线性无关的解即可.

显然，$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$即为所求. 从而包含$\boldsymbol{\eta}$ 的基础解系为ξ，η.

5．证：

由性质 1 可知$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$均为它的解，只须说明它们线性无关即可. 设$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，即$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.

$\because\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\therefore\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$ 故$k_1=k_2=k_3=0$.

从而$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，于是$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$是方程组的基础解系.

6．（1）通解为$\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1\quad(k\in R)$ ；

（2）通解为$\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3-2\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{bmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}(k\in R)$.

第三章自测题

一、单项选择题

1．B；2．C；3．D；4．C；5．C；6．C；7．D；8．C；9．D；10．D；11．A；12．A；13．C；14．D；15．B；16．C；17．D；18．B；19．B；20．C

二、解答题

1．（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

2．证：

假设$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

所以$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即存在一组数$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m$，使得$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，于是$\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_1$.

又因为$\boldsymbol{\beta}_1$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即$\boldsymbol{\beta}_1=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$，从而$\boldsymbol{\beta}_2=(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m$，即$\beta_2$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$的线性表示，

矛盾.

3．证：

（1）因$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故存在一组数$k_1, k_2, k_3$，使得$\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 可以断定$k_3 \neq 0$，因为若不然，$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，此与已知矛盾. 这时$\boldsymbol{\alpha}_3 = \left[-\frac{k_1}{k_3}\right]\boldsymbol{\alpha}_1 + \left[-\frac{k_2}{k_3}\right]\boldsymbol{\alpha}_2 + \frac{1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}_4$，所以$\boldsymbol{\alpha}_3$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$线性表示.

（2）假设$\boldsymbol{\alpha}_3$能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，因$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，此与已知矛盾.

4．证：

因$\boldsymbol{AX} = 0$有非零解，故$R(\boldsymbol{A}) < 3$，于是$\boldsymbol{A}$的列向量组的秩也小于3，而向量组$\boldsymbol{B}$可由$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示，故$R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) < 3$，所以向量组$\boldsymbol{B}$线性相关.

5．解：做矩阵的初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}.$$

当$t = 1$时，矩阵的秩等于2，此时向量组线性相关；当$t \neq 1$时，矩阵的秩等于3，此时向量组线性无关.

6．解：做矩阵的初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以$R(\boldsymbol{A}) = 3$.

7．解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix},$$

因此，当$b_3 = b_1 + b_2$时方程组有解.

8．证：

（1）当$R(\boldsymbol{A}) = n$时，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 因为$\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，所以$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}^{n-1}| \neq 0$，于是$R(\boldsymbol{A}^*) = n$.

（2）当$R(\boldsymbol{A}) = n-1$时，$|\boldsymbol{A}| = 0$，所以$\boldsymbol{AA}^* = 0$，由第10题结论$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n$，$R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 因为$R(\boldsymbol{A}) = n-1$，故$\boldsymbol{A}^*$中至少有一元素非零，所以$R(\boldsymbol{A}^*) \geqslant 1$，于是$R(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

（3）当$R(\boldsymbol{A}) < n-1$时，$\boldsymbol{A}$中所有$n-1$阶子式均为零，故$\boldsymbol{A}^* = 0$，从而$R(\boldsymbol{A}^*) = 0$.

9．证：

（1）显然$(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{13}, \boldsymbol{A}_{14})^{\mathrm{T}}$是非零向量，并且$a_{i1}\boldsymbol{A}_{11}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{12}+a_{i3}\boldsymbol{A}_{13}+a_{i4}\boldsymbol{A}_{14}=\boldsymbol{0}(i=2, 3, 4)$，所以$(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{13}, \boldsymbol{A}_{14})^{\mathrm{T}}$是方程组的非零解.

（2）记$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$，因为$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{D}\neq 0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，从而$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，于是线性方程组的基础解系中只含有一个向量．所以$(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{13}, \boldsymbol{A}_{14})^{\mathrm{T}}$是方程组的基础解系.

10．证：

因$\boldsymbol{A}(\eta_i-\eta_0)=\boldsymbol{A}\eta_i-\boldsymbol{A}\eta_0=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}=0(i=1, 2, \cdots, n-r)$，故$\eta_i-\eta_0(i=1, 2, \cdots, n-r)$是$\boldsymbol{AX}=0$的非零解.

又$R(\boldsymbol{A})=r<n$，故$\boldsymbol{AX}=0$的基础解系含有$n-r$个向量，只须证明$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$线性无关.

设$k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0)=\boldsymbol{0}$，即

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}-(k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性无关．所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=k_1+\cdots+k_{n-r}=0$.

于是$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_0$线性无关，从而其为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

第四章　特征值

习题 4.1

1．（1）由特征方程$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0$，得特征值$\lambda_1=2, \lambda_2=3$.

当$\lambda_1=2$时，解方程组$\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，得$x_1=-x_2$，相应的特征向量可取为$k_1\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\ (k_1\neq 0)$．

当$\lambda_2=3$时，解方程组$\begin{bmatrix}-2&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，得$2x_1=-x_2$，相应的特征向量可取为$k_2\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\ (k_2\neq 0)$.

（2）由特征方程$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\lambda(9-\lambda)=0$，得特征值$\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=9$.

当$\lambda_1=0$时，解方程组$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得$x_1=-x_3, x_2=-x_3$，相应的特征向量可取

为 $k_1\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad(k_1\neq 0)$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，解方程组 $\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $x_1=-x_2-4x_3,\ x_3=0$，相应的特征向量可取为 $k_2\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\quad(k_2\neq 0)$；

当 $\lambda_3=9$ 时，解方程组 $\begin{bmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $x_1-x_2=0$，$x_1+x_2-x_3=0$，相应的特征向量可取为 $k_3\boldsymbol{p}_3=k_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\quad(k_3\neq 0)$.

（3）由特征方程 $\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-4&-1-\lambda&0\\4&-8&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-1)=0$，得特征值 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$，相应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad(k_1\neq 0)$ 与 $k_2\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\\dfrac{20}{3}\end{bmatrix}\quad(k_2\neq 0)$.

（4）由特征方程 $\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^2(\lambda-2)=0$，得特征值 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$，相应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad(k_1\neq 0)$ 与 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3=k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\quad(k_2\neq 0,\ k_3\neq 0)$.

2．证：

（1）因为行列式与其转置行列式的值是相等的，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征方程是相同的，即 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 与其转置阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}$. 故有 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{AA\alpha}=\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，即 $(\lambda-\lambda^2)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\lambda^2=0$，即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{AA\alpha}=\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{E\alpha}=\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，由此 $\boldsymbol{\alpha}-\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=0$，即 $(1-\lambda^2)\boldsymbol{\alpha}=0$，而 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $1-\lambda^2=0$，即 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$.

3．证：

（1）因为 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 是对应于 λ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，故 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\lambda+1)\boldsymbol{X}$，所以 $\lambda+1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 是对应于 $\lambda+1$ 的特征向量.

（2）$\because\ \boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\therefore\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{X})=\lambda(\mathrm{A}\boldsymbol{X})=\lambda^2\boldsymbol{X}$

若 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{X}=\lambda^{k-1}\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{k-1}\lambda\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$，

由归纳法知，对任意的 $k\geqslant 2$ 总有 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\lambda}^k\boldsymbol{X}$，故 $\boldsymbol{\lambda}^k$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 是对应于 $\boldsymbol{\lambda}^k$ 的特征向量；

（3）$\because\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\lambda X}$，$\therefore\ (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{AX})=k(\boldsymbol{\lambda X})=(k\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}$，这表明 $k\boldsymbol{\lambda}$ 是矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 是对应于 $k\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

4．证：

（1）设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 是对应于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的非零特征向量，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\lambda X}$．如果 $\boldsymbol{\lambda}=0$，则有 $\boldsymbol{AX}=0$，此方程组有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$，这与题设矛盾，故 $\boldsymbol{\lambda}$ 不为零.

（2）$\because\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\lambda X}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\therefore\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\lambda X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\lambda X}=\boldsymbol{\lambda A}^{-1}\boldsymbol{X}$，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}$，这表明 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

（3）因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，所以 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}==\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{X}$，这表明 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

5．$\because\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+y+(-2)$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，$y=-3$.

又根据 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|$，因此 $(-1)^3=\begin{vmatrix}2&x&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{vmatrix}=7x+6$，$x=-1$.

解方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$，所以特征向量为 $k\boldsymbol{p}=k\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}(k\neq 0)$.

习题 4.2

1．由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，因而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $(5,\ y,\ -4)$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&x-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(x-\lambda)-32-16(x-\lambda)-8(1-\lambda)=0.$$

把特征值−4 代入上述方程，可得 $x=4$.

又知 $5\times y\times(-4)=\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{vmatrix}=-100$，得 $y=5$.

2．证：$\because |A|\neq 0$，故 A 有逆矩阵 A^{-1}，$\therefore A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=BA$，由相似定义可知 AB 与 BA 相似.

3．由 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=(p_1,\ p_2,\ p_3)=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$，而 $\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}$，可得 $A=P\Lambda P^{-1}$.

由 P 可求得

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*=-\frac{1}{27}\begin{bmatrix}-3&-6&-6\\-6&6&-3\\6&3&-6\end{bmatrix}.$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}\frac{-1}{27}\begin{bmatrix}-3&-6&-6\\-6&6&-3\\6&3&-6\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&-0\end{bmatrix}.$$

4．（1）$\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)$，$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程组 $\begin{bmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $p_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\quad p_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

当 $\lambda_3=-2$ 时，解方程组 $\begin{bmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $p_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$.

$\because |p_1\quad p_2\quad p_3|=\begin{vmatrix}-2&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故 $p_1,\ p_2,\ p_3$ 线性无关，$\therefore$矩阵 A 可以对角化，且 $P=\begin{bmatrix}-2&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\-1&-2&0\end{bmatrix}$，于是 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$.

（2）由 $\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$，得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

由 $(A-\lambda_iE)X=0(i=1,\ 2,\ 3)$，求出 A 的一个极大线性无关特征向量组 $p_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix},\ p_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix},$

$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.因而矩阵可以对角化，且 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

5．证：

若两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则它们有相同的秩. 如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$，由上例可知其特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$.

设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{B})=3$，知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

反之，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，而可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 均可化为有限个初等阵的乘积，即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s$.因而，有 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

6．证：

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&&&0\\a_{21}&a_{22}&&\\\cdots&\cdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$，其中 $a_{ii}\neq a_{jj}(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&&&0\\a_{21}&a_{22}-\lambda&&\\\cdots&\cdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)=0,$$

由题设可知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相等的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

7．由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(-2-\lambda)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$，相应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$线性无关.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\1&2&0\end{bmatrix}$，因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(-2^k)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-2-(-2^k)&2-2(-2)^k&0\\1+(-2)^k&-1+2(-2)^k&0\\-1+(-2)^k&-2+2(-2)^k&1\end{bmatrix}$$

习题 4.3

1．（1）取 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-\frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix}-\frac{14}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{8}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3$ 是正交的.

（2）取 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-\frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}-\frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3$ 是正交的.

2．首先把三个向量正交化.

取 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=(0,\ 0,\ 2)^{\mathrm{T}}-\frac{0}{2}(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}=(0,\ 0,\ 2)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right).$$

其次单位化：$\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}=(0,\ 0,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}=\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right]^{\mathrm{T}}$.

3．证：

（1）$\because \boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，$\therefore \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$）.

$\because \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\therefore (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵.

$\because (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$，$\therefore \boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵.

（2）$\therefore \boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 均为正交矩阵，$\therefore \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{E}$，

又 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)=\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{E}$，

$\therefore \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ 也是正交矩阵.

（3）$\because \boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，$\therefore \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，取行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}|=1$．由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，因而 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，$\therefore |\boldsymbol{A}|=\pm1$.

4．设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $[\alpha_1,\ \alpha_3]=[\alpha_2,\ \alpha_3]=0$，便得

$$\begin{cases} \frac{1}{9}x_1 - \frac{8}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 = 0 \\ -\frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 = 0 \end{cases}$$

解此方程组得 $x_2 = x_1$，$x_3 = -\frac{7}{4}x_1$.

把它代入 $\|\boldsymbol{\alpha}_3\| = 1$，便得 $x_1 = \pm\frac{4}{9}$，于是所求向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ -\frac{7}{9}\right)^{\mathrm{T}} \quad 或 \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \left(-\frac{4}{9},\ -\frac{4}{9},\ \frac{7}{9}\right)^{\mathrm{T}}.$$

习题 4.4

1．证：

$\because (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\therefore \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵.

$\because (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，$\because \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

2.（1） 由特征方程 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda(\lambda-3) = 0$，得特征值 $\lambda_1 = 0，\lambda_2 = 1，\lambda_3 = 3$.

通过解方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = 0 \quad (i = 1，2，3)$，求得三个特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}，\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}，\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

显然 $\boldsymbol{p}_1，\boldsymbol{p}_2，\boldsymbol{p}_3$ 是正交的，只需把它们单位化：$\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$，

$\alpha_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.所求正交矩阵为 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，容易得出 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

（2）由特征方程 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+7) = 0$，得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2，\lambda_3 = -7$.

通过解方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = 0 \quad (i = 1，2，3)$ 求得三个线性无关特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$.把属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ 正交化后得到 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}$.而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，再把它们单位化，得到 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

所求正交矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{bmatrix}$.

（3）由特征方程

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0&-1\\1&3-\lambda&-1&0\\0&-1&3-\lambda&1\\-1&0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(\lambda-5)(\lambda-1)=0,$$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=5$，$\lambda_4=1$. 由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0\quad(i=1,2,3)$ 求出对应于 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 的四个线性无关的特征向量，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

易见它们是正交的. 将它们单位化则有，

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_4=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

正交矩阵 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$.

（4）由特征方程 $\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$，得特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.通过解方程 $(A-\lambda_i E)X=0 \quad (i=1,2,3)$，求得三个特征向量分别为，$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交的单位化后得 $p_1=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$p_3=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. 得正交矩阵

$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，因而，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

3．证：

$\because A\alpha=\lambda_0\alpha,\ A^{\mathrm{T}}=A$，$\therefore P^{\mathrm{T}}A\alpha=P^{\mathrm{T}}\lambda_0\alpha=\lambda_0 P^{\mathrm{T}}\alpha$ 又 $E^{\mathrm{T}}=E$，即 $(PP^{-1})^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}})^{-1}P=PP^{-1}$.

所以，$P^{\mathrm{T}}AE\alpha=P^{\mathrm{T}}APP^{-1}\alpha=(P^{-1}AP)P^{\mathrm{T}}\alpha=(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda_0 P^{\mathrm{T}}\alpha$.

这表明 λ_0 是矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 的特征值，而相应的特征向量是 $P^{\mathrm{T}}\alpha$.

4．证：

因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 T 使 $T^{-1}AP=B$.

而 $T^{-1}AT=B=B^{\mathrm{T}}=(T^{-1}AT)^{\mathrm{T}}=T^{\mathrm{T}}A(T^{\mathrm{T}})^{-1}$，因而 $T^{-1}=T^{\mathrm{T}}$.

所以存在正交矩阵 P=T，使 $P^{-1}AP=B$.

5．对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量应有两个，它们线性无关且都与 $\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，因而可取 $\alpha_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化后作成正交矩阵，

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}，于是，A=T\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}T^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

第四章自测题

一、单项选择题

1．B；2．B；3．C；4．C；5． 6．A；7．D；8．D；9．B；10．B；11．C；12．C

二、解答题

1．（1）由 A 的特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & -1\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)=0$，解得特征值 $\lambda_1=0，\lambda_2=2，\lambda_3=4$.而相应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. 故相应于上述 $\lambda_1，\lambda_2，\lambda_3$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1，k_2\alpha_2，k_3\alpha_3$（$k_1，k_2，k_3$ 均不为零).

（2）由 A 的特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$，

解得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1，\lambda_3=5$．当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，得特征向量，$k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}(k_1\neq 0，k_2\neq 0)$ 当 $\lambda_3=5$ 时，得特征向量 $k_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

2．解：

解特征方程 $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1，\lambda_3=-1$. 欲使 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 有两个线性无关的特征向量，矩阵 $A-E$ 的秩必须等于 1，即其经过一次初等行变换，

$$A-E=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ x & 0 & y\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ x & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故必有 $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}=-y-x=0$，即 $x+y=0$. 属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量必与 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关特征向量线性无关，故 A 有三个线性无关的特征向量时，必须满足 $x+y=0$.

3．解：

（1）考虑 $|A-2E|=\begin{vmatrix}3-2 & 0 & 0\\ 1 & t-2 & 3\\ 1 & 2 & 3-2\end{vmatrix}=0$，即 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & t-2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=8-t=0$，所以 $t=8$.

（2）解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&6&3\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，解得 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$.故对应于特征值 2 的所有特征向量为 $k\boldsymbol{p}=k\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\ (k\neq 0)$.

4．解：

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&10&6\\1&-3-\lambda&-3\\-2&10&8-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$，解得特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\end{bmatrix}$，对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}5\\1\\0\end{bmatrix}$．由于 $\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 是线性无关的，所以用 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2&3&5\\1&0&1\\-2&1&0\end{bmatrix}$ 是可逆的，从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 为对角矩阵.

第五章　二次型

习题 5.1

1．（1）$f=(x_1，x_2)\begin{bmatrix}1&3\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$；

（2）$f=(x_1，x_2，x_3)\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&2\\0&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；

（3）$f=(x_1，x_2，x_3)\begin{bmatrix}-1&1&-1\\1&-3&-2\\-1&-2&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

2．$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(x_1，x_2，x_3)\begin{bmatrix}2&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=2x_1^2+2\sqrt{2}x_1x_2+3x_2^2+x_3^2$.

3．由于 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}，\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}，|\boldsymbol{C}|\neq 0$，则 $f=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.已知，

$$f=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}，所以 A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}.$$

（1）$\because \boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4&-4\\-4&7&4\\-4&4&0\end{bmatrix}$,

$\therefore f=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}2&-4&-4\\-4&7&4\\-4&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=2y_1^2-8y_1y_2+7y_2^2+8y_2y_3-8y_1y_3$.

（2）$\because \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，

$\therefore f=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

习题 5.2

1.（1）
$$\begin{aligned}f&=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3=(2x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2)-x_2^2-4x_2x_3\\&=2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-(x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)+4x_3^2\\&=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3^2\end{aligned}$$

令 $y_1=x_1-x_2,\ y_2=x_2+2x_3,\ y_3=x_3$，则 $f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$.

由于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，$|\boldsymbol{C}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 是可逆的.

（2）令 $x_1=y_1+y_2,\ x_2=y_1-y_2,\ x_3=y_3$，则
$$\begin{aligned}f&=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\\&=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)y_3\\&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3\\&=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2\end{aligned}$$

再令 $z_1=y_1+y_3,\ z_2=y_2,\ z_3=y_3$，则 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

由 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ $\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=z_1+z_2-z_3\\x_2=z_1-z_2-z_3\\x_3=z_3\end{cases}$，可以验证上述变换是正确的.

2.（1）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$，

得特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$，而相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，三者是正交的，经单位化后作成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{PA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，于是取正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，可得，

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{PY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PY})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APY}\\&=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2\end{aligned}$$

（2）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$.

而相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，将其正交化得，

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

经单位化后作成正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}，则 \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AT}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{bmatrix}.$$

$$\therefore f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}=(y_1,\ y_2,\ \ y_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

（3）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{bmatrix}$,由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&4-\lambda&0\\-2&0&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6)=0$，

得特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=6$，而相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$，三者是正交的. 经单位化后作成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&0&-\frac{1}{\sqrt5}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt5}&0&\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$.

于是取正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，可得，

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}\\&=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1^2+4y_2^2+6y_3^2\end{aligned}$$

（4）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&4-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0$，

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=5,\ \lambda_3=-4$，而相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，将其正交化得，

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},$$

经单位化后作成正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，

$$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}，则 T^{\mathrm T}AT=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{bmatrix}.$$

$$\therefore\quad f=X^{\mathrm T}AX=Y^{\mathrm T}T^{\mathrm T}ATY=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=5{y_1}^2+5{y_2}^2-4{y_3}^2$$

3.（1）f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$,由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)=0$，

得特征值 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-1$ 而相应的特征向量为，

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix},$$

三者是正交的. 经单位化后作成正交阵 P，

$$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}，则 PA^{\mathrm T}P=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

于是取正交变换 $X=PY$，可得，

$$f=X^{\mathrm T}AX=(PY)^{\mathrm T}A(PY)=Y^{\mathrm T}P^{\mathrm T}APY$$

$$=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$$

（2）f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$，由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\0&1-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\lambda(\lambda-2)=0$，得

特征值 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.而相应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，三者是正交

的. 经单位化后作成正交矩阵 P，

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}，则 P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

于是取正交变换 $X=PY$ ，可得，

$$f=X^{\mathrm{T}}AX=(PY)^{\mathrm{T}}A(PY)=Y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APY$$

$$=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=y_2^2+2y_3^2$$

（3）f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ，由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$ ，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$.而相应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$，三者是正交的. 经单位化后作成正交矩阵 P,

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}，则 P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

于是取正交变换 $X=PY$ ，可得，

$$f=X^{\mathrm{T}}AX=(PY)^{\mathrm{T}}A(PY)=Y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APY$$

$$=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

4．令 $\begin{cases}y_1=\sqrt{2}x_1\\ y_2=\sqrt{3}x_2\\ y_3=\sqrt{5}x_3\end{cases}$ ，则有 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2\\ x_3=\frac{1}{\sqrt{5}}y_3\end{cases}$ ，即 $X=CY$ ，$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$.

因为 $|C|=\frac{1}{\sqrt{30}}\neq 0$ ，所以，X=CY 为可逆线性变换，经此变换得 $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

5．先将二次型 $5x^2-6xy+5y^2$ 用正交变换化为标准型. 其所对应的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$，

不难求得其特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=8$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.经单位化后得

$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.作 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{bmatrix}$ 为正交变换.

将此变换代入原方程得 $2(\tilde{x}-1)^2+8\left(\tilde{y}+\frac{1}{2}\right)^2-8=0$，令 $x=\tilde{x}-1,\ y=\tilde{y}+\frac{1}{2}$，则得 $x^2+4y^2=4$，这表明曲线是一个椭圆.

习题 5.3

1.（1）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$，它的各阶顺序主子式为 $1>0,\ \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,\ \ |\boldsymbol{A}|=1>0$，所以 f 是正定的.

（2）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&3&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$，它的各阶顺序主子式为 $1>0,\ \begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1<0$，所以 f 不是正定的.

（3）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$，它的各阶顺序主子式为 $3>0,\ \begin{vmatrix}3&2\\2&4\end{vmatrix}=8>0,\ \ |\boldsymbol{A}|=28>0$，所以 f 是正定的.

（4）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{bmatrix}$，考察它的各阶顺序主子式：$1>0,\ \begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0$，

对任意 $k\,(2<k\leqslant n)$，

$$A=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2+\cdots+r_k}\begin{vmatrix}1+\frac{k-1}{2}&1+\frac{k-1}{2}&\cdots&1+\frac{k-1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow\left(1+\frac{k-1}{2}\right)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,k]{c_i-c_1}\left(1+\frac{k-1}{2}\right)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{2}&0&\cdots&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=$$

$$\longrightarrow\left(1+\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}>0.$$ 故 f 是正定的.

2．解：

二次型对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&t\\1&1&-1\\t&-1&4\end{bmatrix}$，若使二次型为正定，只需 $\boldsymbol{A}$ 为正定即可. $\boldsymbol{A}$ 的一阶主子式为 2>0，二阶主子式 $\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$，若 $|\boldsymbol{A}|>0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 即为正定矩阵. 由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&t\\1&1&-1\\t&-1&4\end{vmatrix}=-t^2-2t+2>0$，得 $-1-\sqrt{3}<t<-1+\sqrt{3}$. 因此当 $-1-\sqrt{3}<t<-1+\sqrt{3}$ 时，二次型是正定的.

3．证：

$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶实对称矩阵. 所以存在 m 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{bmatrix}\quad \text{或 } \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的特征值. 以下证明 $\lambda_i\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, m)$.

设 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 对应的二次型为

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X},$$

令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，则有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_my_m^2$. 另一方面，对任意 $x\neq 0$，列向量 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 或为零或不为，故 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\geqslant\boldsymbol{0}\geqslant 0$，此即总有 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_my_m^2\geqslant 0$，根据 y 的任意性（因为 x 是任意的），便得 $\lambda_i\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, m)$.

4．证：因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵的充要条件是它的特征值全为正实数，所以可得特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n(\lambda_i>0, i=1, 2, \cdots, n)$，又因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$. 注意到 A 是正交矩阵，因而 $A^TA=E$，$A^T=A^{-1}$，不妨取正交矩阵

P=A，则有 $A^{-1}AA=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，即 $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

而 $E=A^TA=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{bmatrix}$，

由此知 $\lambda_i^2=1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，但 $\lambda_i>0$，故 $\lambda_i=1$，所以 A 是单位矩阵.

5．证：

首先 A 为对称矩阵. 事实上 $A^T=(U^TU)^T=U^TU=A$，所以 A 是对称矩阵. 设 $x\neq 0$，则 AX 是一个列矩阵，并且也可以认为是一个列向量，于是，$f=X^TAX=X^T(U^TU)X=(X^TU^T)(UX)=(UX)^T(UX)=[UX,UX]=\|UX\|>0$，因此 $f=X^TAX>0$，所以 $f=X^TAX>0$ 为正定二次型.

第五章自测题

一、选择题

1．B；2．A；3．D

二、解答题

1．解：

（1）$f=(x,\ y,\ z)\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$；

（2）$f=(x,\ y,\ z)\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$；

（3）$f=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\begin{bmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$.

2．解：

f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$，由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$，

的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.而相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，三者是正交的. 经单位化后作成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}，则 \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

于是取正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，可得，

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.$$

3.（1）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{bmatrix}$，因为 $A_1=-2<0$，$A_2=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-6\end{vmatrix}=11>0$，

$A_3=|\boldsymbol{A}|=-38<0$,，所以 f 是负定的.

（2）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&-3&-6\\2&-3&9&0\\1&-6&0&19\end{bmatrix}$，因为 $A_1=1>0$，$A_2=2>0$，$A_3=9>0$，

$A_4=|\boldsymbol{A}|=9>0$，所以二次型 f 是正定的.

（3）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$，因为 $A_1=2>0$，$A_2=-2<0$，$A_3=|\boldsymbol{A}|=-8<0$，所以 f 即不是正定的也不是负定的.

4．f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda+1)^2=0$，

解得特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=5$ 时，得相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，得相应的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$.把$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$正交化，得$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}$.再将$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$单位化，

得$\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{t}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.作正交矩阵$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{TZ}$为正交

变换，于是，$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ATZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AT})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}=5z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

5．f的矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}t&1&1&0\\1&t&-1&0\\1&-1&t&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，考察各阶顺序主子式：$A_1=t$，$A_2=t^2-1$，$A_3=A_4=t^3-3t-2$.

$$令\begin{cases}A_1>0\\A_2>0\\A_3>0\\A_4>0\end{cases}，\quad 得\begin{cases}t>0\\|t|>1\\(t-2)(t+1)^2>0\end{cases}，\quad 所以t>2.$$

综合上述，当$t>2$时，二次型f是正定的，当$t=2$时，二次型f是半正定的.

参考文献

[1] 姜豪、滕钟仁、张皓编著. 线性代数. 浙江大学出版社，1999.

[2] 赵树嫄编著. 线性代数（第三版）. 中国人民大学出版社，2013.

[3] 同济大学应用数学系《线性代数》编写组. 线性代数. 同济大学出版社，2003.

[4] 吕瑞峰主编. 线性代数. 中国教育文化出版社，2005.

[5] 陈东升主编. 线性代数与空间几何. 中国科学技术出版社，2006.

[6] David C. Lay（美）著. 线性代数及其应用（第三版）（英文版）. 电子工业出版社，2010.

[7] 方文波主编. 线性代数及其应用. 高等教育出版社，2011.

[8] 刘金冷主编. 大学数学. 电子工业出版社，2007.

[9] 李维铮、郭耀煌等. 运筹学. 清华大学出版社，2005.

[10] 刘金冷编著. 预测与决策技术—原理及应用软件设计. 天津科学技术出版社，1998.

[11] 蔡美德编著. 预测与决策. 科学技术文献出版社，1992.

[12] 陶靖轩编著. 经济预测与决策. 中国计量出版社，2004.

[13] 杨兵初主编. 大学物理学（上册）. 高等教育出版社，2011.

[14] 柯亨玉、龚子平编著. 电磁场理论基础（第 2 版）. 人民邮电出版社，2011.

[15] 苏汝铿编著. 量子力学（第二版）. 高等教育出版社，2002.

[16] 杜一平、潘铁英、张玉兰编著. 化学计量学应用. 化学工业出版社，2008.

后　记

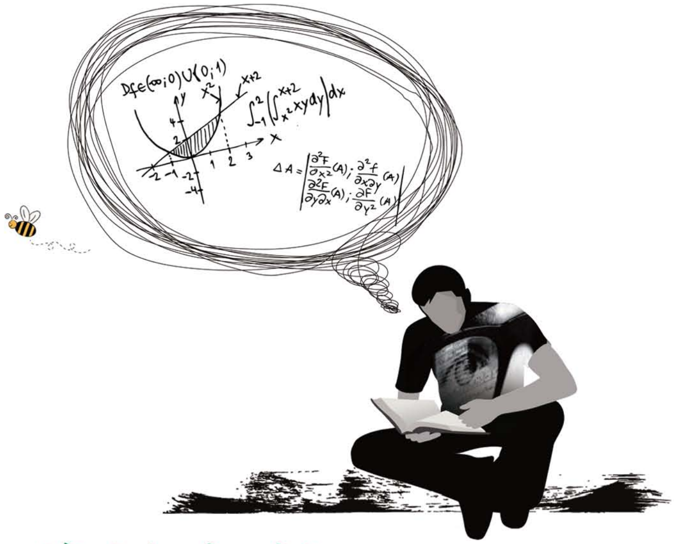
本书在编著过程中，参考了许多专著、教材等资料，在此谨向著作者表示深深的谢意！同时，也得到了天津海运职业学院刘金冷教授和中国科学院数学与系统科学研究院王世坤研究员的精心指导和帮助，以及天津海运职业学院领导和教务处、科研处、基础课部的大力支持，在此一并表示衷心的感谢和深深的感激！

由于信息技术的迅猛发展，线性代数的应用也愈加广泛和深入，加之编者水平有限，书中难免有不足以及错误之处，真诚希望读者给予批评指正。

编　者

2014 年 3 月

欢迎登录 免费 获取本书教学资源
http://www.hxedu.com.cn



线性代数及其应用

Linear Algebra and Its Applications

策划编辑：施玉新
责任编辑：施玉新
封面设计：张　昱

ISBN 978-7-121-23308-1

9 787121 233081 >

定价：29.00 元